UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

DESARROLLO DE UN MÉTODO DE INTEGRACIÓN NODAL EN MALLAS TETRAÉDRICAS UTILIZANDO LA DESCOMPOSICIÓN DEL ELEMENTO VIRTUAL

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MECÁNICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

BRUNO BASTIÁN REBOLLEDO GUTIÉRREZ

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
NANCY HITSCHFELD KAHLER
VIVIANA MERUANE NARANJO

Este trabajo fue financiado por:
Proyecto CONICYT-FONDECYT N°1181192

SANTIAGO DE CHILE
2022

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS
DE LA INGENIERÍA MENCIÓN MECÁNICA
Y MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO
POR: **BRUNO BASTIÁN REBOLLEDO GUTIÉRREZ**
FECHA: 2022
PROF. GUÍA: ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN

DESARROLLO DE UN MÉTODO DE INTEGRACIÓN NODAL EN MALLAS TETRAÉDRICAS UTILIZANDO LA DESCOMPOSICIÓN DEL ELEMENTO VIRTUAL

La integración numérica de los métodos de Galerkin para resolver problemas de valores de frontera tridimensionales en mallas poliédricas arbitrarias ha recibido recientemente una atención considerable en la literatura de análisis numérico. Por otro lado, la integración directa en los nodos es la más utilizada, porque se basa en menos evaluaciones, pero conduce a inestabilidades numéricas debido a un mecanismo similar a la subintegración y al desvanecimiento de las derivadas de las funciones de base en los nodos.

En esta tesis, se presenta el desarrollo de un método de integración nodal en el espacio $\mathbb{R}^3$ en mallas tetraédricas, que se basa en el marco matemático del elemento virtual. Adoptamos un método de aproximación para obtener las funciones de máxima entropía (maxent), con resultados de error de máquina ($error \approx 10^{-13}$) en el test de la parcela para desplazamientos, debido a la propiedad intrínseca delta kronecker en el contorno del dominio. Además se utilizan las funciones de Mínimos Cuadrados Móviles Modificados (mmls), donde se incluyen restricciones adicionales sobre los coeficientes, permitiendo generar una aproximación más estable y computacionalmente más eficiente, pero que no llega al error de máquina en el test de la parcela para desplazamiento, principalmente por que éstas aproximaciones no tienen la propiedad delta kronecker cuando estas se calculan sobre el contorno del dominio. Las funciones de base construidas son no negativas, suaves, linealmente completas y más compactas en el caso mmls. La suavidad se controla mediante parámetros enteros positivos: el orden de normalización de la aproximación de las funciones y el radio del soporte que la aproximación. El esquema propuesto es una adaptación del método NIVED (Nodal Integration using the Virtual Element Descomposition) para espacios en $\mathbb{R}^2$, el cual se extiende a tres dimensiones. En nuestro enfoque, las integrales de forma débil, se integran de forma nodal, utilizando celdas representativas de nodos ubicados en cuatro partes específicas del elemento. Estos nodos contienen la información de los desplazamientos nodales y variables de estado como las deformaciones y esfuerzos. La integración nodal se realiza mediante el Método de Elementos Virtuales VEM, donde la forma bilineal se descompone en una parte de consistencia y otra de estabilidad. En particular, el método propuesto va dirigido en el análisis lineal y no lineal de sólidos para pequeños desplazamientos y cinemática de pequeñas deformaciones. Varios ejemplos numéricos para elastoestática lineal y viscoelasticidad no lineal, demuestran la alta precisión y eficiencia del método para geometrías tridimensionales. Finalmente el método NIVED en la extensión tridimensional, demostró ser un esquema consistente, estable y convergente.

Dedicado a mis padres, por estar conmigo, por enseñarme a crecer y a que si caigo debo levantarme, por apoyarme y guiarme, por ser las bases que me ayudaron a llegar hasta aquí.

Saludos

Agradecimientos

Muchas gracias al profesor Alejandro Ortiz por creer en mis capacidades, desafiarme en cada instante a superar mis miedos y llegar a buen acuerdo en las propuestas. En momentos difíciles aún recuerdo decirme que todo va a estar bien. Gracias igualmente a las profesoras Viviana Meruane y Nancy Hitschfeld por su disposición invaluable para la solución de cualquier tipo de problemas.

A mis padres por creer en mí, y ofrecer todo a su disposición para educarme en buena fe. A Mi hermana por ayudar con lo quehaceres del hogar mientras yo trabaja arduamente. A mi familia en general, gracias.

Agradezco el apoyo emocional e incondicional de mi novia Paulina Fuentes. Escuchaste muchas veces mis frustaciones, miedos y alegrías con respecto a este proceso.

Gracias a mis compañeros Rodrigo Silva y Sebastián Luza por la incalculable ayuda en momentos de incertidumbre y gran aporte en la realización de esta tesis.

Finalmente, doy las gracias al Proyecto CONICYT-FONDECYT N°1181192 por la ayuda en el financiamiento de esta tesis, lo que motivó el continuo desarrollo del método NIVED en tres dimensiones.

Tabla de Contenido

1. Introducción **1**
1.1. Antecedentes Generales . . . 1
1.2. Motivación . . . 2
1.3. Objetivos . . . 2
1.3.1. Objetivo General . . . 2
1.3.2. Objetivos Específicos . . . 2
1.4. Alcances . . . 3

2. Metodología **4**
2.1. Etapas del Trabajo . . . 4
2.2. Normas de Convergencia . . . 4

3. Antecendentes **6**
3.1. Métodos Con Malla y Sin Malla . . . 6
3.2. Funciones Base de la Máxima Entropía . . . 7
3.2.1. Marco Teórico de la Entropía Relativa Mínima . . . 7
3.3. Funciones Base de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS) y Mínimos Cuadrados Móviles Modificado (MMLS) . . . 8
3.3.1. Mínimos Cuadrados Móviles (MLS) . . . 9
3.3.2. Mínimos Cuadrados Móviles Modificado (MMLS) . . . 10
3.4. Métodos de Integración Nodal . . . 11
3.5. Convergencia, Consistencia y Estabilidad . . . 13
3.6. Malladores Tetraédricos . . . 14
3.6.1. TetGen . . . 14
3.6.2. GID . . . 15
3.6.3. gmsh . . . 15
3.7. Ecuaciones Gobernantes Lineales . . . 15
3.7.1. Forma Fuerte . . . 15
3.7.2. Forma Débil . . . 16
3.7.2.1. Caso Generalizado . . . 16
3.8. Ecuaciones Gobernantes no Lineales . . . 18
3.8.1. Técnicas Iterativas . . . 20
3.8.2. Método de Newton . . . 20

4. Integración Nodal Utilizando la Descomposición del Elemento Virtual **23**
4.1. Celda de Integración Nodal . . . 23
4.1.1. Celda de Vértice . . . 24
4.1.2. Celda de Borde . . . 25

4.1.3. Celda de Cara 26
4.1.4. Celda de Interior 27
4.2. Contribución Nodal 28
4.3. Descomposición del Elemento Virtual 29
4.4. Operadores de Proyección 30
4.5. Matrices de Proyección 32
4.6. Matriz de Rigidez Elemental NIVED en $\mathbb{R}^3$ 34
4.7. Vector de Fuerzas Elemental NIVED en $\mathbb{R}^3$ 35
4.8. Normas de Convergencia NIVED en $\mathbb{R}^3$ 36

5. Extensión al Análisis no Lineal: Caso Viscoelástico 37

6. Ejemplos Numéricos y Discusión 40
6.1. Test de la Parcela en Desplazamiento Para $\mathbb{R}^3$ 40
6.2. Estrato Elástico Infinito. 42
6.3. Estabilidad Numérica 48
6.4. Cilindro Presurizado de Pared Gruesa 49
6.5. Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna 55
6.6. Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna 60

7. Conclusiones 67

Bibliografía 69

Índice de Tablas

6.1. Error relativo en la norma L^2 para el Test de la Parcela. 42
6.2. Error relativo en la semi norma H^1 para el Test de la Parcela. 42
6.3. Desplazamientos radiales NIVED en tres dimensiones en los puntos A y B para el problema del Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas en el Tiempo $t = 20$. 62

Índice de Ilustraciones

3.1. Celda de integración Ω_a a mostrada en gris utilizando (a) celda de Voronoi, y (b) triángulo de tres nodos. Las celdas además son subdivididas en subceldas $\Omega_{a,c}$ con volumen V_c. Fuente: [11]. 12

3.2. Problema de valor de frontera tridimensional. (a) Esquema que ilustra el problema del valor de contorno para elasticidad lineal. (b) Partición $\mathcal{T}^h$ del dominio Ω. (c) Vista dividida del dominio discretizado. Fuente: [10]. 16

3.3. Celda de un dominio representativo nodal usando una malla poliédrica de caras triangulares. El nodo y su celda representativa se denotan por E, x_E son las coordenadas nodales y $|E|$ su volumen asociado. Fuente: Elaboración Propia. . 17

3.4. Representación esquemática de los tres nodos típicos ubicados en Γ_t con coordenada x_{S_i} $(i = 1, 2, 3)$ y área de influencia asociada $|S_i|$. x_{S_1} es un nodo en el vértice de la frontera, x_{S_2} nodo del borde del dominio y x_{S_3} nodo de cara. Fuente: [10]. 18

3.5. Posibilidad de múltiples soluciones. Fuente: [**?**]. 19

3.6. Método de Newton. Fuente: [**?**]. 21

4.1. Representación esquemática de una celda de integración nodal tetraédrica. El nodo de integración y su celda nodal asociada se indican con E, el volumen de la celda nodal con $|E|$. La normal unitaria hacia el exterior del contorno de la celda nodal es $\boldsymbol{n}_1$. Las coordenadas del nodo de integración son x_E. El triángulo ▲ representa la regla de Gauss de 1 punto sobre cada cara de la celda nodal E. Fuente: Elaboración Propia. 24

4.2. Celda tipo Vértice. Caso de un Poliedro con 7 vértices y 10 caras triangulares. • indica la regla de Gauss con 1 punto sobre cada cara triangular. • el nodo de integración Nived tridimensional. → la normal unitaria hacia el exterior de cada cara triangular. ⊗ los vértices del poliedro. Fuente: Elaboración Propia. 24

4.3. Celda tipo Borde. Caso de un tetraedro con 4 vértices y 4 caras triangulares. • indica la regla de Gauss con 1 punto sobre cada cara triangular. • el nodo de integración Nived tridimensional. → la normal unitaria hacia el exterior de cada cara triangular. ⊗ los vértices del poliedro. Fuente: Elaboración Propia. 26

4.4. Celda tipo Cara. Caso de un tetraedro con 4 vértices y 4 caras triangulares. • indica la regla de Gauss con 1 punto sobre cada cara triangular. • el nodo de integración Nived tridimensional. → la normal unitaria hacia el exterior de cada cara triangular. ⊗ los vértices del poliedro. Fuente: Elaboración Propia. 27

4.5. Celda tipo Interior. Caso de un tetraedro con 4 vértices y 4 caras triangulares. • indica la regla de Gauss con 1 punto sobre cada cara triangular. • el nodo de integración Nived tridimensional. → la normal unitaria hacia el exterior de cada cara triangular. ⊗ los vértices del poliedro. Fuente: Elaboración Propia. 28

4.6. Construcción de la lista de contribución nodal local. Las funciones de base nodal se evalúan en el punto de integración ▲. Un círculo centrado en un nodo representa el soporte de la función de base nodal. La lista de contribución está formada por los nodos etiquetados del 1 al 5 ($m = 5$) ya que sus soportes (círculos formado por trazos) toman un valor distinto de cero en el punto de integración (es decir, contienen el punto de integración). Los círculos punteados no contienen el punto de integración y, por lo tanto, sus nodos no forman parte de la lista. Fuente: [11] 29
6.1. Secuencia de mallas utilizadas para el Test de la Parcela. (a) Malla no estructurada de 380 elementos y $h_{max} = 0.14$ in, (b) malla no estructurada de 1125 elementos y $h_{max} = 0.095$ in. Fuente: Elaboración Propia. 41
6.2. Problema del Test de la Parcela en Desplazamiento. Fuente: Elaboración Propia. 42
6.3. Geometría del modelo y condiciones de contorno para el problema del Estrato Elástico Infinito. Fuente: [61] 43
6.4. Secuencia de mallas no estructuradas utilizadas para el problema del Estrato Elástico Infinito. (a) Malla de 235 elementos y $h_{max} = 0.34$ in, (b) malla de 1415 elementos y $h_{max} = 0.18$ in, (c) malla de 3205 elementos y $h_{max} = 0.14$ in, (d) malla de 6362 elementos y $h_{max} = 0.11$ in, (e) malla de 9369 elementos y $h_{max} = 0.09$ in. Fuente: Elaboración Propia. 45
6.5. Tasas de convergencia para el problema del Estrato Elástico Infinito. El método NIVED usando las funciones maxent ofrece las tasas más óptimas de convergencia en la norma L^2 y la seminorma H^1. Fuente: Elaboración Propia. 46
6.6. Costo computacional del esquema NIVED en el problema del Estrato Elástico Infinito. El costo computacional del enfoque NIVED usando las funciones mmls es notablemente menor que el caso NIVED usando las funciones maxent, pero por otra parte, la precisión del segundo método es muy superior. Fuente: Elaboración Propia. 46
6.7. Solución exacta del desplazamiento para una malla de 9369 nodos y $h_{max} = 0.09$ para el problema del Estrato Elástico Infinito. Fuente: Elaboración Propia. . . 47
6.8. Solución numérica del desplazamiento para el problema del Estrato Elástico Infinito. Malla 6.4a (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.4d (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.4e (e) maxent (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia. 47
6.9. Análisis de valores propios en el caso tridimensional. Representación de las tres formas modales que siguen a los seis modos de cuerpo rígido. (a)-(c) MEM (1 punto), (d)-(f) MEM (24 puntos), (g)-(i) MEM-VED (1 pt-pt), (j)-(l) NIVED-maxent (1 pt-pt), (m)-(ñ) NIVED-mmls (1 pt-pt). Fuente: Elaboración Propia. 49
6.10. Geometría del modelo y condiciones de contorno para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. Fuente: [11] 50
6.11. Secuencia de mallas utilizadas para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. (a) Malla no estructurada de 141 elementos y $h_{max} = 0.26$ in, (b) malla no estructurada de 298 elementos y $h_{max} = 0.20$ in, (c) malla no estructurada de 593 elementos y $h_{max} = 0.16$ in, (d) malla no estructurada de 1533 elementos y $h_{max} = 0.12$ in, (e) malla no estructurada de 3265 elementos y $h_{max} = 0.09$ in. Fuente: Elaboración Propia. 52
6.12. Tasas de convergencia para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. El método NIVED usando las funciones maxent ofrece las tasas más óptimas de convergencia en la norma L^2 y la seminorma H^1. Fuente: Elaboración Propia. 53

6.13. Solución exacta del desplazamiento y el esfuerzo de von Mises para una malla de 3265 nodos y $h_{max} = 0.09$ in para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. Fuente: Elaboración Propia. 53
6.14. Solución numérica del desplazamiento para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. Malla 6.11c (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.11d (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.11e (e) maxent, (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia. . . . 54
6.15. Solución numérica del esfuerzo de von Mises para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. Malla 6.11c (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.11e (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.11b (e) maxent, (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia. 55
6.16. Geometría del modelo para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. Fuente: [64] 56
6.17. Secuencia de mallas utilizadas para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. (a) Malla no estructurada de 128 elementos y $h_{max} = 0.28$ in, (b) malla no estructurada de 405 elementos y $h_{max} = 0.21$ in, (c) malla no estructurada de 695 elementos y $h_{max} = 0.17$ in, (d) malla no estructurada de 1702 elementos y $h_{max} = 0.13$ in, (e) malla no estructurada de 3044 elementos y $h_{max} = 0.1$ in. Fuente: Elaboración Propia. 57
6.18. Tasas de convergencia para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. El método NIVED usando las funciones maxent ofrece las tasas más óptimas de convergencia en la norma L^2 y la seminorma H^1. Fuente: Elaboración Propia. 58
6.19. Solución exacta del desplazamiento y el esfuerzo de Von Mises para una malla de 9369 nodos y $h_{max} = 0.09$ para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. Fuente: Elaboración Propia. 58
6.20. Solución numérica del desplazamiento para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. Malla 6.17c (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.17d (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.17e (e) maxent, (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia. . . . 59
6.21. Solución numérica del esfuerzo de von Mises para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. Malla 6.17c (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.17d (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.17e (e) maxent, (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia. 60
6.22. Dominio y condiciones de contorno para el Cilindro Viscoelástico de Pared Gruesa Sometido a Presión Interna. Fuente: [11] 61
6.23. Secuencia de mallas utilizadas para el problema del Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna. (a) Malla no estructurada de 1221 grados de libertad y $h_{max} = 0.29$ in, (b) malla no estructurada de 2124 grados de libertad y $h_{max} = 0.19$ in. Fuente: Elaboración Propia. 63
6.24. Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna. Historia temporal del desplazamiento radial medido en los puntos de control A (curvas superiores) y B (curvas inferiores) para tres conjuntos de parámetros viscoelásticos: (a) $(\mu_0, \mu_1) = (0.7, 0.3)$, (b) $(\mu_0, \mu_1) = (0.3, 0.7)$ y (c) $(\mu_0, \mu_1) = (0.01, 0.99)$. Fuente: Elaboración Propia. 64

6.25. Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna. Comparación de gráficos del esfuerzo radial utilizando esquemas FEM en dos dimensiones y NIVED en dos y tres dimensiones. Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.7, 0.3)$: (a) FEM Q4, (b) FEM-Q9, (c) NIVED 2D, d) NIVED 3D (mmls) y e) NIVED 3D (maxent). Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.01, 0.99)$: (f) FEM Q4, (g) FEM-Q9, (h) NIVED 2D, (i) NIVED 3D (mmls) y (j) NIVED 3D (maxent). Fuente: Elaboración Propia. 65

6.26. Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna. Comparación de gráficos del desplazamiento para el método NIVED en tres dimensiones usando las funciones mmls y maxent. Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.7, 0.3)$: (a) NIVED 3D-mmls, (b) NIVED 3D-maxent. Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.3, 0.7)$: (c) NIVED 3D-mmls, (d) NIVED 3D-maxent. Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.01, 0.99)$: (e) NIVED 3D-mmls, (f) NIVED 3D-maxent. Fuente: Elaboración Propia. 66

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes Generales

En mecánica de sólidos computacional, los métodos de Galerkin sin malla han sido estudiados durante años, en donde se utiliza la integración numérica para evaluar las integrales de la forma débil (usualmente cuadratura de Gauss), lo que conlleva a errores de integración numérica debido a la naturaleza de las funciones de base utilizadas. Existen dos fuentes de error asociadas con los esquemas de integración en los métodos de Galerkin sin malla: (1) Son funciones no polinomiales, por lo que no son integrables de manera exacta; y (2) en general, la región que está definida por los soportes en la intersección de dos funciones de base nodal superpuestas no coincide con la celda de integración. Esta última fuente es la que más aporta al error de cuadratura [1]. Aunque mediante el uso de más puntos de cuadratura, los métodos de Galerkin sin malla pueden obtener resultados numéricos estables y razonables [2]. Sin embargo, esto no es beneficioso desde el punto de vista del costo computacional.

Las diferentes técnicas de integración numérica en los métodos de Galerkin sin malla se pueden agrupar en dos grupos principales: integración por elemento o celda de integración y técnicas de integración nodal. La integración nodal en métodos sin malla es atractiva ya que las variables de estado (deformaciones, esfuerzos y variables internas) se pueden almacenar en los nodos evitando así la necesidad de algoritmos de reasignación de variables en problemas con remallado. En el método sin malla de transporte óptimo [3], el remallado se evita utilizando los puntos de integración como portadores de la información del estado del material junto con cambios en el soporte de las funciones base para permitir simulaciones de deformaciones finitas Lagrangianas. En el método del punto material [4], los puntos de integración de una cuadrícula inicial (generalmente, una cuadrícula cartesiana) llevan las variables de estado del material y la etapa de solución ocurre en tres fases: (1) la información se mapea desde las partículas a los nodos de la cuadrícula; (2) se resuelven ecuaciones de movimiento en los nodos de la cuadrícula, y la información actualizada se mapea de nuevo a las partículas para actualizar sus posiciones y velocidades; y (3) la cuadrícula se reinicia. En este proceso, la malla permanece fija durante toda la simulación y la deformación hace que los puntos de material se muevan dentro de otras celdas de la cuadrícula.

Por otra parte, la integración nodal directa de 1 punto de integración, conduce a inestabilidades numéricas debido a la subintegración y decaimiento de las derivadas en las funciones de base de los nodos, la cual se manifiesta principalmente por modos espurios y grandes osci-

laciones en la solución [5]. Se han realizado numerosos esfuerzos para estabilizar los esquemas de integración nodal en [6, 7, 8].

1.2. Motivación

El método del elemento virtual (VEM) [9], se ha desarrollado para afrontar los problemas de integración numérica en elementos poligonales y en los últimos años, para problemas de valor de contorno en mallas poliédricas arbitrarias [10]; además constituye un marco adecuado para corregir errores de integración en métodos de malla libre [11]. El método consiste en la construcción de una representación algebraica (exacta) de la matriz de rigidez sin la evaluación explícita de funciones de base (las funciones de base son virtuales). En el VEM, la matriz de rigidez se descompone en dos partes: una matriz que garantiza la reproducción exacta de un campo de desplazamientos lineal (matriz de rigidez de consistencia) y una matriz de corrección que provee estabilidad (matriz de rigidez de estabilidad). Esta descomposición está formulada en el espíritu del teorema de equivalencia de Lax para esquemas de diferencias finitas (consistencia + estabilidad $\rightarrow$ convergencia).

Utilizando la formulación antes mencionada, en esta tesis se propone construir celdas de integración nodal tetraédricas para extender a tres dimensiones el método de integración nodal NIVED [11] para celdas poligonales. La integración nodal se usa con el propósito de evitar los algoritmos de reasignación de variables en problemas con remallado.

Por otra parte el costo computacional de los esquemas de integración para mecánica de sólidos tridimensional es muy alto para mallas más finas, donde las soluciones suelen ser más estables y exactas. Esto se debe principalmente a que las matrices de cálculo crecen en comparación con los esquemas 2D, específicamente en un grado de libertad con respecto a cada nodo, generando problemas de eficiencia en aspectos de computacionales. Es por esto que se propone usar las funciones de base de mínimos cuadrados móviles modificados, que son de cómputo más eficiente.

Las funciones de máxima entropía aseguran ser precisas, superando con creces en términos de orden del error a los métodos con mallas existentes, incluso si se comparan con métodos dentro del marco libre de mallas.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

- Desarrollar un esquema de integración nodal en mallas tetraédricas para problemas de mecánica de sólidos utilizando la descomposición del elemento virtual.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Implementar un esquema de integración nodal utilizando funciones de base maxent y mínimos cuadrados móviles modificados, según se propone en las Referencias [12, 13], para reducir el costo computacional.

- Resolver el test de la parcela en desplazamiento para tres dimensiones, problemas tridimensionales de elastoestática lineal y viscoelasticidad.
- Estudiar la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema desarrollado mediante los ejemplos implementados.

1.4. Alcances

Los alcances de este trabajo abarcan desde problemas básicos tridimiensionales en la teoría lineal elastoestática y viscoeslásticos no lineales, hasta problemas más complejos con superficies tanto regulares simples como superficies más complejas polares, siempre en el marco matemático del método del elemento virtual, utilizando funciones maxent y mmls. De todos modos cualquier función de base que esté dentro de la teoría sin mallas puede utilizarse en este esquema. Las aproximaciones de las funciones de base son lineales en todo dominio.

Capítulo 2

Metodología

2.1. Etapas del Trabajo

Las principales etapas del trabajo son:

1. Lectura y análisis de bibliografía sobre los métodos sin malla e integración nodal, tanto en mallas poligonales (espacio en $\mathbb{R}^2$), como poliédricas (espacio en $\mathbb{R}^3$). Comprender los conceptos y requisitos para la convergencia, consistencia y estabilidad.

2. Desarrollo del esquema de integración nodal NIVED en tres dimensiones utilizando celdas de integración nodal tetraédricas.

3. Implementación en MATLAB de funciones de base maxent y mmls utilizando el concepto de funciones de base para cálculo de las variables de estado.

4. Implementación computacional del esquema NIVED tridimensional en MATLAB para problemas de elasticidad lineal y viscoelasticidad.

5. Estudio de la consistencia, estabilidad y convergencia del método de integración nodal NIVED en tres dimensiones.

6. Análisis de resultados, conclusiones finales y posibilidad de futuros trabajos.

2.2. Normas de Convergencia

Para estudiar la exactitud y la convergencia, se utilizan dos medidas globales del error. La norma L^2 relativa del error en los desplazamientos se define como

$$\frac{\left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h\right\|_{L^2}}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}} = \left(\frac{\sum_E \int_E (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h)\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h)d\boldsymbol{x}}{\sum_E \int_E \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.1}$$

y la semi-norma H^1 relativa del error en la energía es

$$\frac{\left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h\right\|_{H^1}}{\|\boldsymbol{u}\|_{H^1}} = \left(\frac{\sum_E \int_E (\varepsilon-\varepsilon^h)\cdot(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^h)d\boldsymbol{x}}{\sum_E \int_E \varepsilon\cdot\boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{x}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

donde el superíndice ^{h} indica la aproximación numérica. Por lo tanto, la otra variable se relaciona con la solución exacta.

En las normas, las integrales sobre el elemento E se calculan usando cuadratura numérica. Para esto, se define un nodo de integración en el centroide de la celda tetraédrica conteniendo toda la información de la variable principal y las de estado. Finalmente, para poder integrar en el contorno del tetraedro siguiendo la metodología VEM, se define 1 punto de integración en el centroide de cada cara del tetraedro.

Capítulo 3

Antecendentes

3.1. Métodos Con Malla y Sin Malla

El comportamiento de los sólidos puede describirse en términos de ecuaciones diferenciales parciales. En general, resolver estas ecuaciones mediante métodos analíticos clásicos para formas arbitrarias es casi imposible. Debido a esto se recurre a esquemas numéricos los cuales dependiendo de la forma de discretizar el medio pueden ser clasificados en método con malla y métodos sin malla.

Un método con malla clásico es el método de los elementos finitos, donde la solución se obtiene utilizando la malla para interpolar e integrar de forma numérica las ecuaciones gobernantes en su forma débil. La malla utilizada está formada por elementos, los cuales están interconectados mediante nodos. Las funciones de interpolación dependen de esta malla. Entonces cuando se trabaja con deformaciones extremas y los elementos sufren una gran distorsión se generan errores en la solución numérica. Estos errores se deben principalmente a que los elementos adquieren, después de la gran deformación, volúmenes o áreas negativas. Para corregir este problema se suele remallar los sectores afectados y los resultados deben ser interpolados en la nueva malla, aumentando la complejidad de la resolución y el tiempo de cómputo.

En los métodos sin malla, la aproximación no depende de la interconexión entre los nodos, disminuyendo así la sensibilidad de las distorsiones geométricas, haciéndolos más adecuados para modelar grandes deformaciones. Los métodos sin malla pueden ser clasificados como métodos de Galerkin, métodos de Petrov-Galerkin o métodos de colocación. Algunos ejemplos de métodos de Galerkin son el método sin malla de Galerkin (EFG) [14], el método de reproducción de partículas de kernel (RKPM) [15], el método de elemento natural (NEM) [16], y el método de esferas finitas (MFS) [17]. El representante de los métodos de Petrov-Galerkin es método local sin malla de Petrov-Galerkin (MLPG) [18]. Y para la categoría de métodos de colocación esta el método de las partículas suavizadas (SPH) [19].

En los métodos de Galerkin sin malla se utiliza una malla de fondo para realizar la integración numérica de la forma débil (normalmente cuadratura de Gauss), idéntica a la forma débil de FEM. Sin embargo, en estos métodos se utilizan funciones de forma (o base) diferentes, las cuales no dependen de la conectividad entre los nodos, solo de sus coordenadas. En la construcción de estas funciones de forma se utilizan los nodos que se encuentran en la

vecindad del punto que se desea aproximar, haciéndolas más complejas en forma y construcción. Pero la suavidad de las aproximaciones sin malla es mucho mejor que la interpolación Lagrangiana basada en elementos empleada en FEM. Por ejemplo, la suavidad de la aproximación de MLS con el peso Gaussiano es C^∞. En contraste, la interpolación FEM solo tiene continuidad C^0.

Las funciones de los métodos sin malla de Galerkin son racionales (no polinomiales), las cuales son difíciles de integrar con exactitud y es uno de los principales inconvenientes de estos métodos. Este inconveniente es extremadamente importante para asegurar la convergencia y estabilidad del método. Aunque una cuadratura de alto orden puede ofrecer estabilidad y convergencia óptima, es prohibitivamente costosa para el uso práctico. Por otro lado, la cuadratura de orden bajo consume menos CPU pero puede generar soluciones no convergentes e inestables.

Finalmente, el método desarrollado en esta tesis pertenece a la categoría de un método sin malla de Galerkin, pero integrando directamente en los nodos.

3.2. Funciones Base de la Máxima Entropía

Una de las funciones de base que se utilizará en esta tesis, son las funciones base de la máxima entropía (maxent). Estas funciones presentan ciertas propiedades atractivas en los métodos sin malla, como por ejemplo son suaves, sus valores son siempre positivos y tienen la propiedad que los nodos interiores no tienen influencia en su valor cuando esta se calcula sobre el contorno del dominio, facilitando la imposición de las condiciones de borde.

3.2.1. Marco Teórico de la Entropía Relativa Mínima

Considere un dominio convexo representado por un conjunto de N nodos dispersos y un prior (peso) función $w_a(\boldsymbol{x})$ asociada con cada nodo a. Podemos escribir la aproximación para una función de valor vectorial $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ en la forma:

$$\boldsymbol{v}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_a, \tag{3.1}$$

donde $\boldsymbol{v}_a := \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_a)$ son los coeficientes nodales, $\{\phi_a\}_a^m$ son las funciones de base no negativas asociada con el nodo a y $m \leq N$ representa el número de nodos cuyas funciones de base cumplen las condiciones de reproducción cero y primer orden:

$$\phi_a(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad \sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x}) = 1, \quad \sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x})c_a = 0, \tag{3.2}$$

donde $c_a = \boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}$ son coordenadas nodales desplazadas.

Las funciones base $\{\phi_a\}_a^m$ se definen a partir de un problema de optimización que se establece en cada punto de evaluación $\boldsymbol{x}$ para las restricciones lineales dadas por la Ecuación (3.2). Debido a las propiedades no negativas y de partición de la unidad (condición de reproducción de orden cero), las funciones de base se pueden interpretar como una distribución de probabilidad discreta. La entropía informativa proporciona una medida canónica de la

incertidumbre asociada con una distribución de probabilidad discreta. El esquema de aproximación menos sesgado que es consistente con las restricciones lineales lo proporciona el principio de máxima entropía.

La formulación de las aproximaciones Maxent se obtiene maximizando la medida de entropía de Shannon-Jaynes [20] cuando se utiliza el prior de pesos nodales:

$$H(\phi \mid w) = -\sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x}) \ln\left(\frac{\phi_a(\boldsymbol{x})}{w_a(\boldsymbol{x})}\right), \tag{3.3}$$

$D(\phi \mid w) := -H(\phi \mid w) \geq 0$ es la medida de entropía relativa y el principio variacional correspondiente viene dado por el principio de entropía relativa mínima (cruzada) [21]. El problema de optimización de las funciones de base de Maxent se puede establecer en la formulación variacional $(ME)_w$ para $\boldsymbol{x}$ fijo:

$$\max H(\phi \mid w) \tag{3.4a}$$

$$\phi_a(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad \sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x}) = 1, \quad \sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x}) c_a = 0. \tag{3.4b}$$

Se pueden emplear métodos de dualidad para resolver el problema de optimización convexa en la Ecuación (3.4) de manera eficiente y robusta [22, 23]. En esta tesis, se utilizará como prior de función de peso la función de base radial Gaussiana dada por:

$$w_a(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\frac{\gamma}{h_a^2}\left\|c_a^2\right\|\right) \tag{3.5}$$

donde γ es un parámetro que controla el tamaño del soporte de la función de base, c_a son las coordenadas nodales desplazadas, y h_a es el espaciamiento nodal característico asociado al nodo a.

Las funciones de base resultantes de la solución no son interpolantes, excepto en el límite convexo del conjunto nodal, donde se mantiene la propiedad débil de delta-Kronecker. La propiedad débil de delta-Kronecker proporciona una gran ventaja sobre otros tipos aproximados, como en el Mínimos cuadrados móviles (MLS), donde se requieren tratamientos especiales para la imposición de condiciones de borde (EBC) [24]. Además, las funciones básicas heredan la suavidad de las funciones nodales de ponderación previas [25, 26]. Varias funciones de ponderación previa nodal, como la función de ponderación gaussiana [3, 23, 27], la función de ponderación polinomial cuártica [28, 29, 30], la función de ponderación nodal basada en el conjunto de niveles [31, 32], la función de ponderación nodal exponencial [33, 34], y la función de distancia aproximada a las curvas planas [12] se han utilizado para construir aproximaciones de máxima entropía con propiedades específicas deseadas.

3.3. Funciones Base de Mínimos Cuadrados Móviles (MLS) y Mínimos Cuadrados Móviles Modificado (MMLS)

3.3.1. Mínimos Cuadrados Móviles (MLS)

La técnica que se resume a continuación está bien establecida, según [35, 36]. Para aproximar la función de campo desconocido $u(x)$ sobre un conjunto de nodos distribuidos aleatoriamente $\{x_i\}, i = 1, 2, ..., n$ la aproximación por mínimos cuadrados móviles $u^h(x)$ es definida como

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\boldsymbol{x}) a_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \tag{3.6}$$

donde $\boldsymbol{p}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x}) = [p_1(\boldsymbol{x}), p_2(\boldsymbol{x}), ..., p_m(\boldsymbol{x})]$ son funciones de base, $a(\boldsymbol{x})$ es un vector que contiene los coeficientes $a_j(\boldsymbol{x})(j = 1, 2, ..., m)$, y m es el número de términos de la base $\boldsymbol{p}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x})$. Las funciones base generalmente se eligen como bases monomiales. En esta tesis se optó por la base cuadrática, la cual se define como:

$$\boldsymbol{p}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x}) = [1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz]. \tag{3.7}$$

El vector de coeficientes $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ se calcula en cualquier punto $\boldsymbol{x}$ del dominio espacial minimizando un error funcional $J(\boldsymbol{x})$ definido en base a los errores de mínimos cuadrados ponderados como:

$$J(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} w(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i\|)(\boldsymbol{p}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - u_i)^2 = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u})^{\mathbf{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}), \tag{3.8}$$

donde $w(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i\|)$ es una función de peso asociada con el nodo i ($w(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i\|) \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x}$ en el dominio de soporte del nodo), $\boldsymbol{x}_i$ es el valor de $\boldsymbol{x}$ en el nodo i, $\boldsymbol{u} = u_i = (u_1, u_2, ..., u_n)$ son los valores (a menudo llamados valores ficticios de la aproximación) del campo desconocido $u(\boldsymbol{x})$ en los nodos $\boldsymbol{x}_i$, y n el número de nodos en el dominio de soporte de $\boldsymbol{x}$ Las matrices $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{W}$ en la ecuación (3.8) se calculan como

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_1(\boldsymbol{x}_1) & p_1(\boldsymbol{x}_2) & \cdots & p_1(\boldsymbol{x}_n) \\ p_2(\boldsymbol{x}_1) & p_2(\boldsymbol{x}_2) & \cdots & p_2(\boldsymbol{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\boldsymbol{x}_1) & p_m(\boldsymbol{x}_2) & \cdots & p_m(\boldsymbol{x}_n) \end{bmatrix}_{m \times n} \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_1(\boldsymbol{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & w_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}_{n \times n} \tag{3.10}$$

. Para calcular el vector coeficiente $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$, minimizamos el funcional $J(\boldsymbol{x})$ con respecto a las componentes del vector $a_j(\boldsymbol{x})$ [37].

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{3.11}$$

donde

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}\boldsymbol{P}^{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^{n} w_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{p}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x}_i), \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{PW} = (w_1(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1), w_2(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_2), ..., w_n(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_n)), \tag{3.13}$$

Si la matriz de momentos $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ no es singular, de la Ec. (3.11) podemos obtener

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{3.14}$$

Sustituyendo $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ en la Ec. (3.6) obtenemos para la aproximación local $u^h(\boldsymbol{x})$

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\boldsymbol{x})u_i \tag{3.15}$$

con $\phi(\boldsymbol{x}) = (\phi_1(\boldsymbol{x}), \phi_2(\boldsymbol{x}), ..., \phi_n(\boldsymbol{x}))$ siendo la función de forma y

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})]_{ji}. \tag{3.16}$$

3.3.2. Mínimos Cuadrados Móviles Modificado (MMLS)

El proceso de construcción de funciones de forma Ec. (3.16) descrito anteriormente falla cuando la matriz de momento $\boldsymbol{A}$ en Ec. (3.12) es singular. La singularidad de la matriz de momentos es causada por ciertas distribuciones degeneradas de nodos dentro del dominio espacial. Esto da como resultado que algunas distribuciones de nodos sean inadmisibles [35, 36, 38]. Para permitir la colocación de nodos casi arbitraria, es decir, tener casi toda la distribución nodal admisible, se sugiere la siguiente modificación a la aproximación de mínimos cuadrados móviles [38].

Al igual que con MLS, comenzamos con la aproximación de una función $u(\boldsymbol{x})$ denotada por $u^h(\boldsymbol{x})$, que está definida por una combinación de m monomios (Ec. (3.7)). Como en MLS, estos coeficientes se calculan minimizando un error funcional que se define en función de los errores de mínimos cuadrados ponderados e incluye restricciones adicionales sobre los coeficientes $\boldsymbol{a}$ correspondientes a los monomios de segundo grado en la base. Al agregar restricciones al funcional de error podemos asegurar la invertibilidad de la matriz de momentos $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ para todas las distribuciones nodales que son admisibles cuando se usan monomios de primer grado como funciones base en MLS. En este enfoque, la solución MLS clásica se altera muy poco cuando la matriz de momentos no es singular.

El funcional de error se define como

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \left[(u^h(\boldsymbol{x}_j) - u_j)^2 w(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j\|)\right] + \mu_{x^2}a_{x^2}^2 + \\ \mu_{y^2}a_{y^2}^2 + \mu_{z^2}a_{z^2}^2 + \mu_{xy}a_{xy}^2 + \mu_{xz}a_{xz}^2 + \mu_{yz}a_{yz}^2, \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde n es el número de nodos en el soporte de $\boldsymbol{x}$, y $\mu = [\mu_{x^2}\ \mu_{y^2}\ \mu_{z^2}\ \mu_{xy}\ \mu_{xz}\ \mu_{yz}]$ son pesos positivos (pequeños) para las restricciones adicionales. Después de la minimización y la

resolución de los sistemas de ecuaciones resultantes, la aproximación MMLS se obtiene como

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(\boldsymbol{x})u_j = \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{3.18}$$

donde ϕ es el vector de funciones de forma:

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1(\boldsymbol{x})...\phi_n(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{p}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{W}. \tag{3.19}$$

En 3D, $\boldsymbol{H}$ es una matriz de 10×10 con todos los elementos iguales a cero excepto las últimas seis entradas de la diagonal que son iguales a μ

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{44} & \boldsymbol{O}_{46} \\ \boldsymbol{O}_{64} & diag(\boldsymbol{\mu}) \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

3.4. Métodos de Integración Nodal

Como se mencionó anteriormente, debido a la complejidad involucrada en la integración de Gauss para los métodos de Galerkin sin malla y a la inestabilidad resultante de integrar de forma directa en los nodos, se han realizado intentos para desarrollar esquemas de integración nodal estables. Se pueden identificar tres esquemas de integración nodal clásicos [39]: método de deformación nodal [5], integración nodal conforme estabilizada (SCNI) [6] y el método del promedio nodal [40]. Las principales diferencias entre estos tres esquemas se basa en cómo calculan el tensor gradiente de deformación. Para los tres esquemas, la versión de la forma bilineal para la integración nodal es la siguiente:

$$a(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h) = \sum_{a=1}^{N} \left[\varepsilon_a(\boldsymbol{v}^h) : \mathbf{D} : \varepsilon_a(\boldsymbol{u})^h V_a\right] \tag{3.21}$$

donde V_a es el área nodal representativa. La deformación nodal ϵ_a es calculada con

$$\varepsilon_a(\boldsymbol{u}^h) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}_a) + \nabla^\top \boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}_a)), \tag{3.22}$$

$$\varepsilon_a(\boldsymbol{u}^h) = \frac{1}{2V_a}\int_{\partial\Omega_a} (\boldsymbol{u}^h \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{u}^h) d\boldsymbol{s}, \tag{3.23}$$

$$\varepsilon_a(\boldsymbol{u}^h) = \frac{1}{V_a}\sum_{c \in T_a} V_a \hat{\varepsilon}_c(\boldsymbol{u}^h), \tag{3.24}$$

para el método de deformación nodal, integración nodal conforme estabilizada (SCNI) y el método del promedio nodal, respectivamente. Para el esquema SCNI la Ecuación (3.23) es aplicada sobre los bordes de la celda de Voronoi (Figura 3.1a), donde $\boldsymbol{n}$ son las normales a los bordes de la celda. El esquema del promedio nodal requiere que $\hat{\varepsilon}_c$ sea calculado dentro de cada triángulo c (Figura 3.1b). El método de deformación nodal no satisface en general el test de la parcela, el método SCNI satisface el test de la parcela, y el método del promedio nodal satisface el test de la parcela sólo cuando utiliza funciones de forma de triángulos de tres nodos. Además, Puso et al. [39] encontraron que SCNI puede causar inestabilidad cerca de los límites del dominio.

Puso et al. [39] propusieron una modificación del esquema de integración SCNI y agregaron un término de estabilización basado en la deformación de subceldas. Para SCNI la deformación es calculada sobre la celda de Voronoi utilizando (3.7), pero en SCNI-modificado propuesto por Puso et al. [39] (MSCNI) la deformación es calculada sobre subceldas de integración, de esta forma se utilizan más "puntos de integración"para estabilizar el método y evitar los modos espurios. La forma bilineal para el esquema MSCNI es

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h) = \sum_{a=1}^{N} ([\varepsilon_a(\boldsymbol{v}^h) : \mathbf{D} : \varepsilon_a(\boldsymbol{u})^h V_a \\ + \sum_{c \in T_a} \alpha(\varepsilon_a(\boldsymbol{v}^h) - \hat{\varepsilon}_c(\boldsymbol{v}^h)) : \tilde{\mathbf{D}} : (\varepsilon_a(\boldsymbol{v}^h) - \hat{\varepsilon}_c(\boldsymbol{v}^h))V_c) \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde V_c es el área de la subcelda (porción de celda de Voronoi), T_a es el conjunto de subceldas asociado con el nodo a, y tanto α como $\tilde{\mathbf{D}}$ son constantes que proveen estabilidad. Para calcular $\hat{\varepsilon}_c$ se utiliza la ecuación (3.23) sobre las subcelda de Voronoi, y para el cálculo de ε_a se utiliza (3.24) promediando la deformación de las subceldas de Voronoi asociadas al nodo a.

Adicionalmente, Chen et al. [41] desarrollaron una versión para problemas no lineales del esquema SCNI. Liu et al. [7] propusieron una técnica de integración nodal para el método de interpolación de punto radial sin malla (NI-RPIM) basado en la expansión de series de Taylor para realizar la integración numérica. Duan et al. [8] propusieron un esquema de integración nodal de segundo orden (QCNI) que puede pasar exactamente el test de la parcela cuadrático, el cual se basa en el principio variacional de Hu-Washizu, que además probó en ejemplos dinámicos. Hillman y Chen [42] propusieron una estalibización basada en gradientes implícitos de deformación en los nodos, logrando un método convergente y estable para problemas lineales y no lineales.

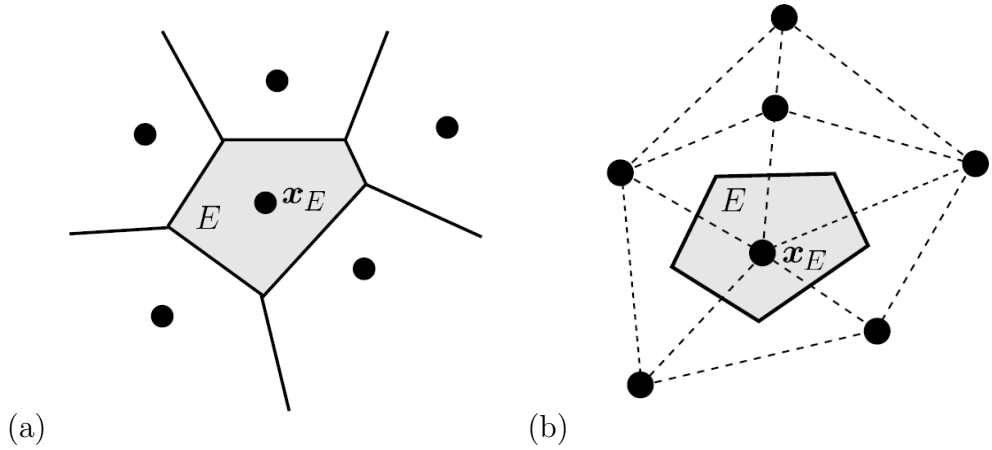


Figura 3.1: Celda de integración Ω_a a mostrada en gris utilizando (a) celda de Voronoi, y (b) triángulo de tres nodos. Las celdas además son subdivididas en subceldas $\Omega_{a,c}$ con volumen V_c. Fuente: [11].

3.5. Convergencia, Consistencia y Estabilidad

Como se dijo anteriormente, en el marco teórico del método del elemento virtual y en virtud del teorema de equivalencia de Lax, la matriz de rigidez se descompone en dos partes: una matriz que garantiza la reproducción exacta de un campo de desplazamientos lineal (matriz de rigidez de consistencia) y una matriz de corrección que provee estabilidad (matriz de rigidez de estabilidad). El teorema de equivalencia de Lax afirma que para un problema bien planteado, una discretización que sea consistente y estable es convergente (consistencia + estabilidad $\rightarrow$ convergencia). Se definirá entonces estos tres conceptos en el marco teórico del método de los elementos finitos y se darán los requisitos para que se cumplan, los cuales son facilmente aplicables al esquema desarrollado en esta tesis.

Para un problema de elasticidad lineal consideremos un elemento finito rectangular de cuatro nodos, cuya matriz de rigidez será de tamaño 8×8. Integrando de forma exacta o utilizando una cuadratura de Gauss de 2×2 su matriz de rigidez tendrá rango cinco, lo que significa que el número de filas linealmente independiente es cinco. Ya que este elemento tiene un total de ocho grados de libertad, el número de ecuaciones a resolver son ocho (y no cinco), entonces para resolver el sistema y obtener una solución única debemos deshacernos de los tres modos de cuerpo rígido aplicando las condiciones de contorno (modos de cuerpo rígido para el caso bidimensional: 2 traslaciones y 1 rotación, los cuales son modos de energía cero). Ahora para el mismo elemento, si utilizamos solo un punto de Gauss para la integración numérica el rango se reducirá a tres. Este elemento ahora tendrá dos modos de energía cero adicionales debido al rango deficiente (es necesario rango 5 para la integración correcta del elemento rectangular de cuatro nodos), a menos que se aplique condiciones de contorno de manera que solo se deban resolver tres grados de libertad. Estos modos adicionales de energía cero espurios (no físicos) son conocidos como modos hourglass [43]. Una malla formada por este tipo de elementos (rango deficiente) puede formar una matriz de rigidez global singular o casi-singular. Para el caso singular, el sistema tendrá infinitas soluciones; para el caso casi-singular la aparición de los modos espurios contaminará el campo de desplazamientos. Una forma de evaluar numéricamente la presencia de modos de energía cero es resolviendo el problema de valores propios para el sistema [18]. Para el caso tridimensional los modos de cuerpo rígido son: 3 traslaciones y 3 rotaciones, además, el elemento tetraedro de cuatro nodos tiene 12 grados de libertad. Esto entrega un rango de matriz de rigidez igual a seis para el elemento tetraédrico, lo que significa que el número de filas linealmente independiente es seis, esta integración si se resuelve con 1 punto de integración obtenemos una matriz de rango 3, esto debería causar problemas de modos espurios si no se imponen condiciones adicionales, para esto se propone subintegrar con 1 punto de Gauss en cada cara del tetraedro, permitiendo resolver el sistema de ecuaciones.

De lo anterior se desprende la condición de estabilidad, que se traduce simplemente como el requisito de que la solución del sistema de ecuaciones discretas sea única y evite modos espurios que pueden estropear la solución para cualquier tamaño de elementos [44], es decir, las matrices de las discretizaciones deben ser correctamente integradas y en consecuencia tener el rango apropiado [45].

Para el caso de la consistencia, esta asegura que a medida que el tamaño de los elementos h tiende a cero, la aproximación discreta $L^h(\boldsymbol{u})$ representa de forma exacta la ecuación dife-

rencial $L(\boldsymbol{u})$ y las condiciones de contorno. El test de la parcela se ha usado tradicionalmente como un procedimiento para verificar el requisito de consistencia [44].

Finalmente se dice que un esquema converge, cuando la solución aproximada $\boldsymbol{u}^h$ tiende a la solución exacta $\boldsymbol{u}$ cuando el tamaño de los elementos h se acerca a cero. Siguiendo el teorema de Lax, para asegurar convergencia es necesario entonces que la aproximación satisfaga las condiciones de consistencia y estabilidad [44].

3.6. Malladores Tetraédricos

Para generar las mallas de base tetraédricas se usan tres programas; TetGen, GID y gmsh, con distintas particularidades, las cuales se notaron afables en las estructuras necesarias para generar el método de integración numérica NIVED en la extensión tridimensional. El programa gmsh se establece como la mejor opción en la generación de mallas tetraédricas. La capacidad de generar modelos tridimensionales por medio de una interfaz y generar mallas con precisión, hacen este programa la mejor opción para el desarrollo del método.

3.6.1. TetGen

El programa Tetgen agrega la dificultad para poder setear y correr el programa, se necesita acceder directamente a línea de comandos del sistema operativo para compilar el programa y poder utilizar todas sus herramientas. Además, es necesario entregar un archivo de entrada para poder generar las mallas, no tiene una interfaz que permita generar modelos tridimensionales, por lo tanto su uso no es totalmente compatible con los objetivos de esta tesis.

Tiene la particularidad de generar una malla tetraédrica de Delaunay restringida. La malla resultante se guarda en cuatro archivos: example.1.node, example.1.ele, example.1.face y example.1.edge, que son una lista de nodos de malla, tetraedros, caras de límite y bordes de límite, respectivamente.).

La característica especial del programa TetGen es que se puede refinar tetraedros agregando puntos de Steiner para eliminar los tetraedros mal formados. Generar una malla de calidad, que contiene más puntos que la anterior, y todos los tetraedros tienen una relación radio-borde limitada por 1: 2, es decir, las formas de los elementos son mejores que las de la malla anterior. Además, TetGen puede imprimir un informe de calidad de malla.

Por otra parte, se puede definir la relación de aspecto de un tetraedro; longitud de borde más larga dividida por su altura de lado más pequeña, esto permite establecer secuencias de malla con facilidad. Además, se puede imponer una restricción de volumen máximo en los tetraedros resultantes. Al hacerlo, ningún tetraedro en la malla resultante tiene un volumen mayor que el valor especificado.

Finalmente, con el programa PARAVIEW se pueden visualizar las mallas tetraédrica en el formato de extensión .vtk.

3.6.2. GID

El programa GID es muy preciso en los cálculos de las mallas tetraédricas por que permite colapsar el modelo y los nodos, quitando errores posibles en la generación de los archivos de malla, sin embargo al igual que el programa TetGen no tiene una interfaz para generar los modelos, por lo tanto su uso no es totalmente compatible con los objetivos de esta tesis.

La ventaja principal es que el programa acepta archivos con la extensión .STEP, por lo que, al usar un programa de simulación como SolidWorks, es precisa la capacidad de aplicar las ecuaciones gobernantes y condiciones de contorno en el programa de simulación y así tener una idea correcta de la solución de los problemas estudiados, estos programas de simulación usan principalmente la teoría de elementos finitos.

3.6.3. gmsh

gmsh parece ser el programa más compatible con los objetivos descritos en esta tesis, por una parte, permite modelar las geometrías, con opciones de generación de parámetros en dos dimensiones y operaciones booleanas, además de tener cuerpos geométricos establecidos, que de igual forma, se puede agregar operaciones booleanas y así acceder a cualquier tipo de geometría requerida.

La capacidad de cambiar los parámetros por medio de opciones de herramientas, permite acceder de manera directa a las secuencias de las mallas, además las opciones de mallado optimizado (Netgen) permiten tener mallados más estables en la distribución nodal. Finalmente los archivos de salida pueden ser seleccionados en una variedad amplia de extensiones, usando la extensión .mesh en toda su información para obtener las mallas tetraédricas necesarias para desarrollar el capítulo de ejemplos numéricos de esta tesis.

3.7. Ecuaciones Gobernantes Lineales

3.7.1. Forma Fuerte

Considere un cuerpo elástico (Figura 3.2a) que ocupa el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y está limitado por la superficie bidimensional Γ cuya normal unitaria exterior es $\boldsymbol{n}_\Gamma$. Se supone que el límite admite descomposiciones de la forma $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ y $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_t$, donde Γ_u es el contorno de Dirichlet y Γ_t es el contorno de Neumann. El cierre del dominio es $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Sea $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ el campo de desplazamiento en un punto $\boldsymbol{x}$ del cuerpo elástico cuando el cuerpo está sujeto a una tracción externa $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) : \Gamma_t \to \mathbb{R}^3$ y fuerzas de cuerpo $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Las condiciones de contorno de Dirichlet (esenciales) impuestas son $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) : \Gamma_u \to \mathbb{R}^3$. El problema del valor de frontera para la elastostática lineal es: encuentre $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \; en \; \Omega, \tag{3.26a}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \; en \; \Gamma_u, \tag{3.26b}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_\Gamma = \boldsymbol{t} \; en \; \Gamma_t, \tag{3.26c}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos de Cauchy.

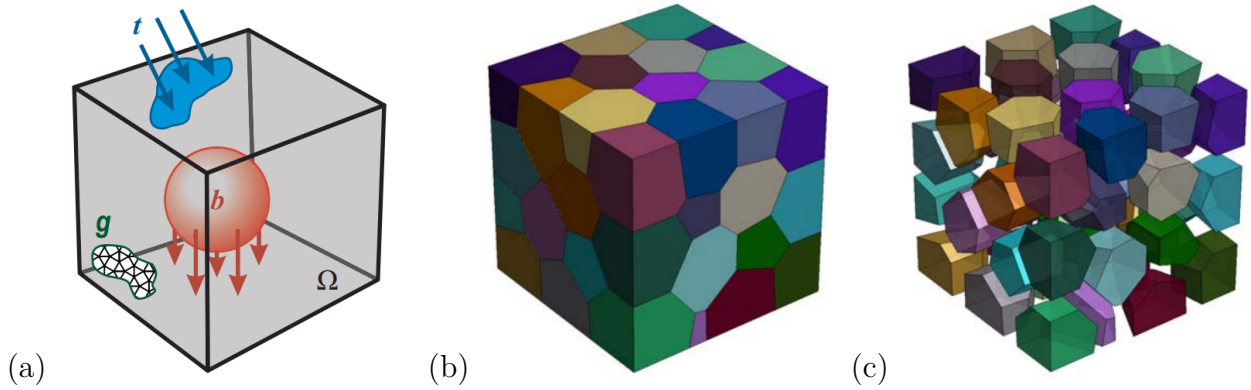


Figura 3.2: Problema de valor de frontera tridimensional. (a) Esquema que ilustra el problema del valor de contorno para elasticidad lineal. (b) Partición $\mathcal{T}^h$ del dominio Ω. (c) Vista dividida del dominio discretizado. Fuente: [10].

3.7.2. Forma Débil

La formulación débil de Galerkin es: encontrar $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{V}$ tal que

$$\begin{gathered} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{W}, \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \varepsilon(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{dx}, \quad \ell(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} dx + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v} ds, \end{gathered} \tag{3.27}$$

donde $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son los espacios de campos de desplazamientos continuos y de prueba:

$$\mathcal{V} := \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{u} \in [H^1(\Omega)]^3, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \ en \ \Gamma_u\}, \quad \mathcal{W} := \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{v} \in [H^1(\Omega)]^3, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \ en \ \Gamma_u\},$$

y $\varepsilon(\boldsymbol{v})$ es el pequeño tensor de deformaciones, que viene dado por

$$\varepsilon(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla^\top \boldsymbol{v}). \tag{3.28}$$

3.7.2.1. Caso Generalizado

Consideramos un conjunto de nodos dispersos que discretiza $\bar{\Omega}$. Usando estos nodos, el dominio Ω se divide en celdas poliédricas representativas nodales, que necesariamente son no superpuestas (tomar como ejemplo del dominio discretiazado la Figuras 3.2a y 3.2b). Esto se puede lograr usando un diagrama tridimensional para una malla de caras triangulares, donde cada nodo que forma las caras triangulares, están conectados para formar un poliedro (Figura 3.3). Denotamos por E, un nodo ubicado en el centroide del poliedro y su celda asociada. El nodo E tiene coordenadas x_E en el sistema de coordenadas cartesianas y el volumen de su celda asociado es $|E|$.

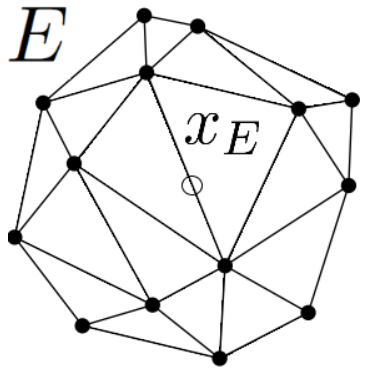


Figura 3.3: Celda de un dominio representativo nodal usando una malla poliédrica de caras triangulares. El nodo y su celda representativa se denotan por E, x_E son las coordenadas nodales y $|E|$ su volumen asociado. Fuente: Elaboración Propia.

Un nodo en Γ_t se denota por S y sus coordenadas en el sistema de coordenadas cartesianas por $\boldsymbol{x}_{S_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. El área de influencia del nodo S está representada por $|S|$. La Figura 3.4 presenta los tres casos típicos de un nodo ubicado en Γ_t. La partición formada por todos los nodos y sus celdas asociadas que se encuentran en Ω se denota por $\mathcal{T}^h$, donde h es el diámetro máximo de cualquier celda en la partición. La partición bidimensional formada por todos los nodos y sus áreas de influencia asociadas que se encuentran en Γ_t se denota con $\boldsymbol{\varepsilon}^h$.

Siguiendo un procedimiento estándar de Galerkin, definimos los siguientes espacios locales discretos a nivel de celda nodal:

$$\mathcal{V}^h|_E := \{\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{u}^h \in [H^1(\Omega)]^3\}, \quad \mathcal{W}^h|_E := \mathcal{V}^h|_E,$$

donde $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$ se da en la forma (3.1) con $\boldsymbol{x} \in E$. Estos espacios locales discretos se ensamblan para formar los siguientes espacios globales discretos:

$$\mathcal{V}^h := \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{V} : \boldsymbol{u}|_E \in \mathcal{V}^h|_E \ \ \forall E \in \mathcal{T}^h\}, \quad \mathcal{W}^h := \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{W} : \boldsymbol{v}|_E \in \mathcal{V}^h|_E \ \ \forall E \in \mathcal{T}^h\}.$$

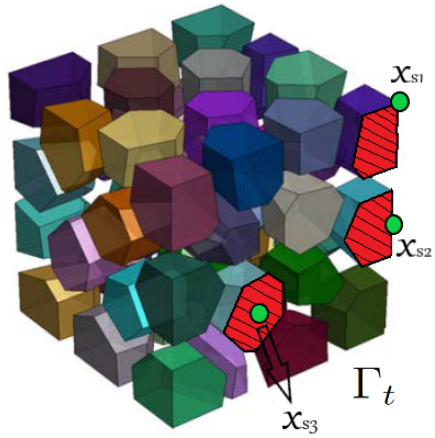


Figura 3.4: Representación esquemática de los tres nodos típicos ubicados en Γ_t con coordenada x_{S_i} $(i = 1, 2, 3)$ y área de influencia asociada $|S_i|$. x_{S_1} es un nodo en el vértice de la frontera, x_{S_2} nodo del borde del dominio y x_{S_3} nodo de cara. Fuente: [10].

Debido a la definición de los espacios globales discretos, podemos evaluar la forma débil (3.27) muestreando localmente en cada nodo de $\mathcal{T}^h$ y sumando todos ellos, de la siguiente manera:

$$a(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} a_E(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} |E| \varepsilon_E(\boldsymbol{v}^h) : \mathcal{D} : \varepsilon_E(\boldsymbol{u}^h) \quad \forall \boldsymbol{u}^h, \forall \boldsymbol{v}^h \in \mathcal{V}^h, \tag{3.29a}$$

$$\ell(\boldsymbol{v}^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} \ell_{b,E}(\boldsymbol{v}^h) + \sum_{S \in \varepsilon^h} \ell_{t,S}(\boldsymbol{v}^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} |E| \boldsymbol{b}_E \cdot \boldsymbol{v}^h + \sum_{S \in \varepsilon^h} |S| \boldsymbol{t}_S \cdot \boldsymbol{v}^h \quad \forall \boldsymbol{v}^h \in \mathcal{V}^h, \tag{3.29b}$$

donde $\mathcal{D}$ es el tensor de módulos del material que define la relación constitutiva $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$; $\boldsymbol{\varepsilon}_E := \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}_E)$, $\boldsymbol{b}_E := \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_E)$ y $\boldsymbol{t}_S := \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_S)$ son cantidades nodales. La ecuación (3.29) es el resultado de la integración nodal directa (1 punto) de las integrales de forma débil.

3.8. Ecuaciones Gobernantes no Lineales

En la solución de problemas lineales, en particular, para NIVED y elementos finitos, siempre se necesita resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas de la forma

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{3.30}$$

siempre que la matriz de coeficientes no sea singular, la solución de estas ecuaciones es única. En la solución de problemas no lineales siempre se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas; sin embargo, generalmente serán no lineales. Consideramos el problema genérico:

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}_{n+1}) = \boldsymbol{f}_{n+1} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}_{n+1}), \tag{3.31}$$

donde $\boldsymbol{u}_{n+1}$ es el conjunto de parámetros de discretización, $\boldsymbol{f}_{n+1}$ un vector independiente de los parámetros y P un vector dependiente de los parámetros. Estas ecuaciones pueden tener múltiples soluciones (es decir, más de un conjunto de $\boldsymbol{u}_{n+1}$ puede satisfacer la ecuación (3.31)). Por lo tanto, si se logra una solución, puede que no sea necesariamente la solución

buscada. La comprensión física de la naturaleza del problema y, por lo general, los enfoques incrementales de pequeños pasos a partir de soluciones conocidas son esenciales para obtener respuestas realistas. Dichos incrementos siempre son necesarios si el problema es transitorio, si la ley constitutiva que relaciona el esfuerzo y la deformación depende de la trayectoria y/o si la trayectoria de carga-desplazamiento tiene bifurcaciones o ramas múltiples en ciertos niveles de carga. El problema general siempre debe partir de una solución cercana a

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{\Psi}_n = 0, \quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_n, \tag{3.32}$$

y a menudo surge cambios en la función forzada $\boldsymbol{f}_n$ a

$$\boldsymbol{f}_{n+1} = \boldsymbol{f}_n + \Delta \boldsymbol{f}_{n+1}. \tag{3.33}$$

La determinación del cambio $\Delta \boldsymbol{u}_{n+1}$ tal que

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \Delta \boldsymbol{u}_{n+1}, \tag{3.34}$$

será el objetivo y, en general, los incrementos de $\Delta \boldsymbol{f}_{n+1}$ se mantendrán razonablemente pequeños para que se pueda seguir la dependencia de la ruta. Además, dichos procedimientos incrementales serán útiles para evitar un número excesivo de iteraciones y seguir el camino físicamente correcto. En la Figura 3.5 se muetra la no unicidad típica que puede ocurrir si la función $\boldsymbol{\Psi}_{n+1}$ disminuye y luego aumenta a medida que el parámetro $\boldsymbol{u}_{n+1}$ aumenta uniformemente. Está claro que seguir el camino $\Delta \boldsymbol{f}_{n+1}$ tendrá signos tanto positivos como negativos durante un proceso de cálculo completo. Es posible obtener soluciones en un solo incremento solo en el caso de no linealidad leve (y sin dependencia de la ruta), es decir, con

$$\boldsymbol{f}_n = 0 \quad \Delta \boldsymbol{f}_{n+1} = \boldsymbol{f}_{n+1}, \tag{3.35}$$

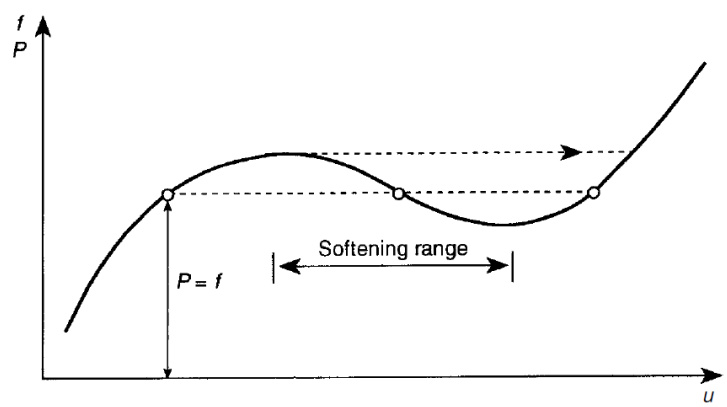


Figura 3.5: Posibilidad de múltiples soluciones. Fuente: [**?**].

La literatura sobre enfoques generales de solución y sobre aplicaciones particulares es extensa y, en un solo capítulo, no es posible abarcar completamente todas las variantes que se han introducido. Sin embargo, intentaremos dar una imagen completa describiendo primero los procedimientos generales de solución.

3.8.1. Técnicas Iterativas

La solución del problema planteado por las ecuaciones (3.31)-(3.40), no se puede abordar directamente y siempre se requerirá alguna forma de iteración. Nos concentraremos aquí en los procedimientos en los que la solución repetida de ecuaciones lineales (es decir, iteración) de la forma

$$\boldsymbol{K} d\boldsymbol{u}^i_{n+1} = \boldsymbol{r}^i_{n+1} \tag{3.36}$$

en el que un superíndice i indica el número actual de iteración. En estas iteraciones se calcula un incremento de solución $d\boldsymbol{u}^i_{n+1}$. Se pueden usar técnicas de eliminación directa (gaussiana) o métodos iterativos para resolver las ecuaciones lineales asociadas con cada iteración [46, 47, 48]. Sin embargo, la aplicación de un método de solución iterativo puede resultar más económico computacionalmente hablando.

Muchas de las técnicas iterativas utilizadas actualmente para resolver problemas no lineales se originaron por la aplicación intuitiva del razonamiento físico. Sin embargo, cada una de estas técnicas tiene una asociación directa con los métodos de análisis numérico y, a continuación, utilizaremos la nomenclatura generalmente aceptada en los textos sobre este tema [47, 49, 50, 51, 52].

Aunque se establece cada algoritmo para un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales, ilustraremos cada procedimiento usando una única ecuación escalar. Esto, aunque útil desde un punto de vista pedagógico, es peligroso ya que la convergencia de problemas con numerosos grados de libertad puede apartarse del patrón simple en una sola ecuación.

3.8.2. Método de Newton

El método de Newton es el proceso de convergencia más rápida para la solución de problemas en los que solo se realiza una evaluación de $\boldsymbol{\Psi}$ en cada iteración. Por supuesto, esto supone que la solución inicial está dentro de la zona de atracción y, por tanto, no se produce divergencia. De hecho, el método de Newton es el único proceso descrito en [**?**], donde la tasa asintótica de convergencia es cuadrática. El método a menudo se denomina método de Newton-Raphson, ya que parece haber sido derivado simultáneamente por Newton y Raphson.
En este método iterativo observamos que, al primer orden, la ecuación (3.31) se puede aproximar como

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}^{i+1}_{n+1}) \approx \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}^i_{n+1}) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^i_{n+1} \qquad d\boldsymbol{u}^i_{n+1} = 0. \tag{3.37}$$

Aquí, el contador de iteraciones generalmente comienza asumiendo

$$\boldsymbol{u}^1_{n+1} = \boldsymbol{u}_n \tag{3.38}$$

donde $\boldsymbol{u}_n$ es una solución convergente en un nivel de carga o paso de tiempo anterior. La matriz jacobiana (o en términos estructurales la matriz de rigidez) correspondiente a una

dirección tangente viene dada por

$$\boldsymbol{K}_T = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{u}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{3.39}$$

La ecuación (3.37) da inmediatamente la corrección iterativa como

$$\boldsymbol{K}_T^i d\boldsymbol{u}_{n+1}^i = \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i$$

o

$$d\boldsymbol{u}_{n+1}^i = (\boldsymbol{K}_T^i)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^i. \tag{3.40}$$

Una serie de aproximaciones sucesivas da

$$\boldsymbol{u}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{u}_{n+1}^i + d\boldsymbol{u}_{n+1}^i = \boldsymbol{u}_n + \Delta \boldsymbol{u}_{n+1}^i \tag{3.41}$$

donde

$$\Delta \boldsymbol{u}_{n+1}^i = \sum_{k=1}^{i} d\boldsymbol{u}_{n+1}^k. \tag{3.42}$$

El proceso se ilustra en la Fig. 3.6 y muestra la convergencia muy rápida que se puede lograr.

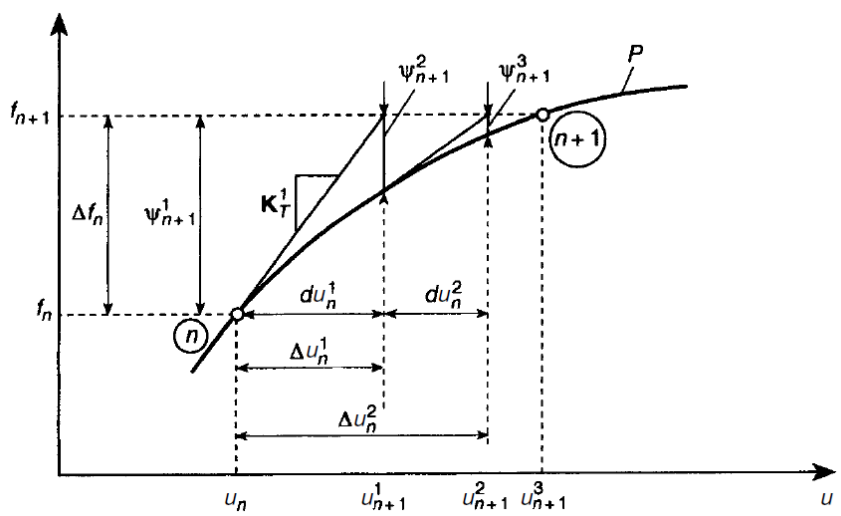


Figura 3.6: Método de Newton. Fuente: [?].

La necesidad de introducir el incremento total $\Delta \boldsymbol{u}_{n+1}^i$ quizás no sea obvia aquí, pero de hecho es esencial si el proceso de solución depende de la trayectoria, como veremos en el Capítulo 5 para algunas ecuaciones constitutivas no lineales de sólidos.

El proceso de Newton, a pesar de su rápida convergencia, tiene algunas características negativas:

- Se debe calcular una nueva matriz $\boldsymbol{K}_T$ en cada iteración;
- Si la solución directa para la Ec. (3.40), la matriz debe factorizarse en cada iteración;
- En algunas ocasiones la matriz tangente es simétrica en un estado de solución pero asimétrica en otro caso (por ejemplo, en algunos esquemas para integrar grandes pará-

metros de rotación [53] o plasticidad no asociada). En estos casos, en general se necesita un solucionador asimétrico.

Algunos de estos inconvenientes están ausentes en los procedimientos alternativos, aunque generalmente se pierde una tasa de convergencia asintótica cuadrática.

Capítulo 4

Integración Nodal Utilizando la Descomposición del Elemento Virtual

Como se discutió en Capítulo 1, la integración nodal directa de la forma bilineal como se indica en (3.29a) no es viable debido a problemas de estabilidad. Como remedio, las técnicas de integración nodal agregan un término de estabilización a la forma bilineal [39]. Aquí, tomamos una ruta diferente y desarrollamos un esquema de integración nodal para métodos sin malla utilizando el marco matemático del método del elemento virtual. En este enfoque, la consistencia y estabilidad del método Galerkin sin malla integrado nodalmente está asegurada por la construcción en base al teorema de equivalencia de Lax.

4.1. Celda de Integración Nodal

La evaluación de la forma débil en un nodo de integración en la partición $\mathcal{T}^h$, donde la partición se construye mediante el método que se muestra en la Figura 3.3, en la que se muestra una celda de integración nodal para un poliedro de caras triangulares. Se destaca que en el esquema de integración nodal, el nodo de integración y su celda nodal asociada son intercambiables. Esto significa que cualquier cantidad que se evalúe en la celda nodal también es una cantidad evaluada en el nodo. En la Figura 4.1 se muestra una celda de integración nodal tetraédrica, base de las mallas para el esquema de celdas nodales NIVED tridimensional. Considerando el sistema de coordenadas cartesianas y utilizando la regla de Gauss de 1 punto sobre los bordes de su celda nodal, $\boldsymbol{x}_E$ son las coordenadas del nodo de integración y $\boldsymbol{n}_1$ es la normal unitaria hacia el exterior de una de las caras del contorno de la celda nodal.

Es importante destacar, que el esquema NIVED tridimensional puede aplicarse para cualquier poliedro, donde las caras no necesariamente deben ser triangulares, basta con saber cuantas caras tiene el poliedro y cuantos lados tienen los polígonos que forman las caras del poliedro, para poder aplicar este esquema computacional. Por motivos prácticos en la fabricación de las mallas para los sólidos, se utiliza como base, las mallas tetraédricas. A continuación se muestran los cuatro casos de las celdas que fundamentan el esquema principal NIVED tridimensional.

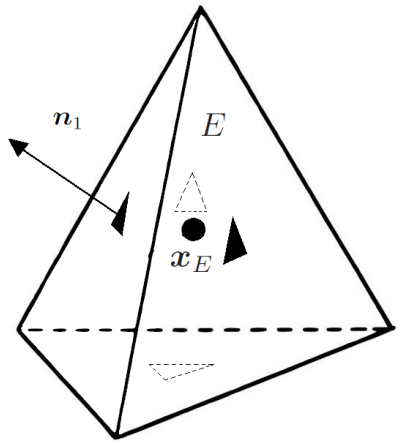


Figura 4.1: Representación esquemática de una celda de integración nodal tetraédrica. El nodo de integración y su celda nodal asociada se indican con E, el volumen de la celda nodal con $|E|$. La normal unitaria hacia el exterior del contorno de la celda nodal es $\boldsymbol{n}_1$. Las coordenadas del nodo de integración son x_E. El triángulo ▲ representa la regla de Gauss de 1 punto sobre cada cara de la celda nodal E. Fuente: Elaboración Propia.

4.1.1. Celda de Vértice

Como su nombre indica, el nodo de integración se ubica en el vértice de un poliedro formado por todos los tetraedros que convergen a un vértices en el contorno del dominio estudiado. Esta nueva configuración, previene la repetición de información para estas celdas y permite extraer la información completa de las condiciones de Neumann y Dirichlet.

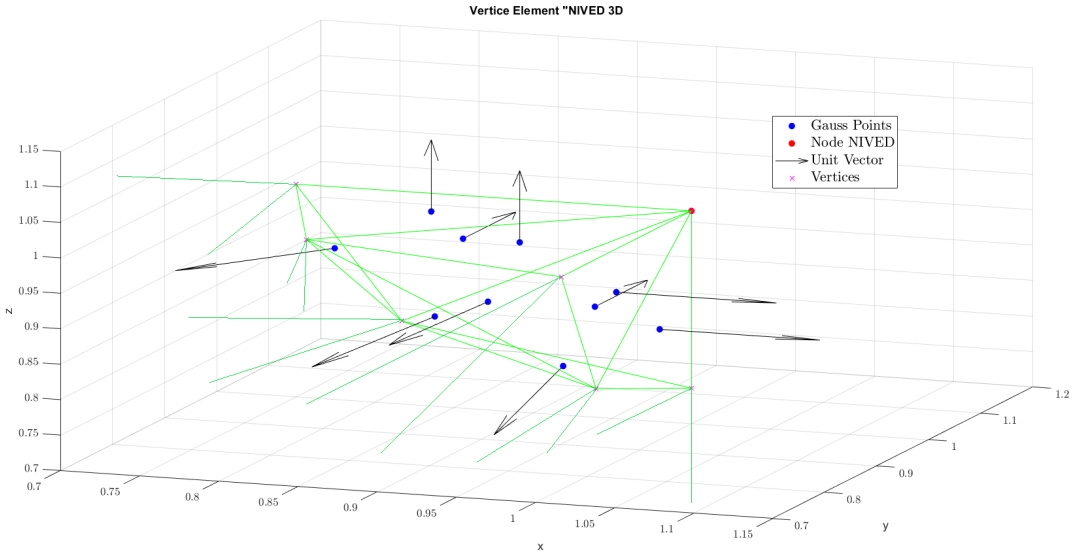


Figura 4.2: Celda tipo Vértice. Caso de un Poliedro con 7 vértices y 10 caras triangulares. • indica la regla de Gauss con 1 punto sobre cada cara triangular. • el nodo de integración Nived tridimensional. → la normal unitaria hacia el exterior de cada cara triangular. ⊗ los vértices del poliedro. Fuente: Elaboración Propia.

Para poder formar el poliedro de la Figura 4.2, usando una malla tetraédrica, en particular para esta tesis, se utilizaron los programas Tetgen, Gmsh y GID, se propone el siguiente pseudocódigo:

Algorithm 1 Formación de Poliedros Usando Tetraedros

Input: Estructura de malla tetraédrica;

1. Coordenadas de los vértices de la malla;
2. Conectividad elemental tetraédrica;
3. Conectividad de las caras triangulares;

Output: Nueva malla con celdas tetraedros + poliedros;

1. Coordenadas de los vértices de la nueva malla;
2. Nueva conectividad elemental poliédrica;
3. Nueva conectividad de las caras triangulares;

for n número de celdas tetraédricas en la malla inicial **do**
  if la celda está en un vértice del dominio **then**

- X_i: Almacenar información de las caras asociadas a la celda en el vértice i;
  - $i = 1, ..., nvert$;

  else
    Y_i: Almacenar información del tetraedro que no se está en el vértice del dominio;
  end if
end for

- Reconfigurar la malla;
  - Reunir la información de los tetraedros + poliedros;
  - Eliminar todos los pares de caras triangulares repetidas;
    - Reordenar la información de las caras;
  - Reasignar índices;
    - Conectividades elementales
    - Conectividad entre caras

4.1.2. Celda de Borde

El nodo de integración se ubica en el punto medio entre los dos vértices de un tetraedro que se encuentran en las aristas de contorno del dominio. En esta ubicación, el nodo permite extraer mayor información de las condiciones de Neumann y Dirichlet. En la Figura 4.3 se observa el caso de una celda de borde tetraédrica.

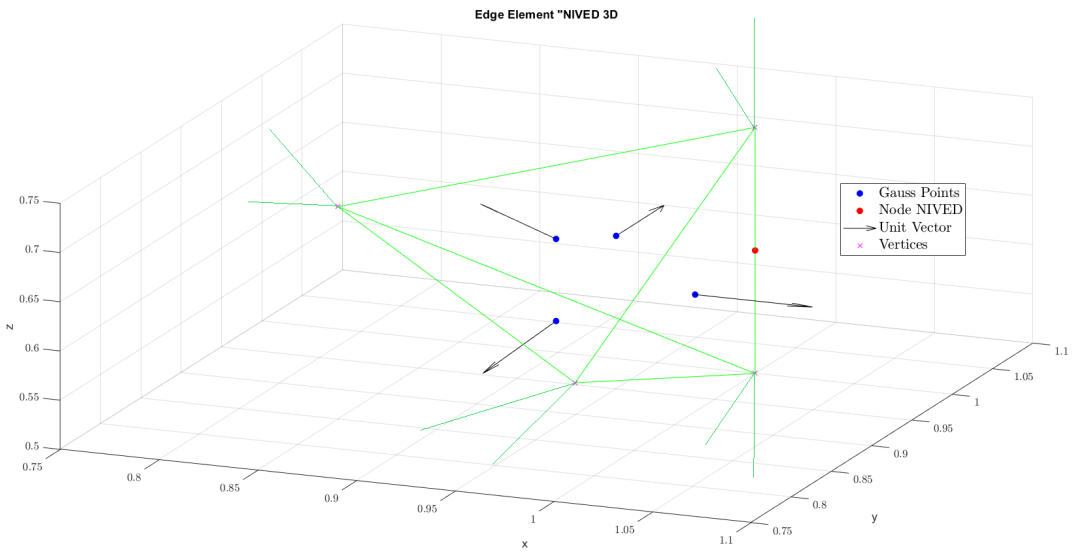


Figura 4.3: Celda tipo Borde. Caso de un tetraedro con 4 vértices y 4 caras triangulares. • indica la regla de Gauss con 1 punto sobre cada cara triangular. • el nodo de integración Nived tridimensional. → la normal unitaria hacia el exterior de cada cara triangular. ⊗ los vértices del poliedro. Fuente: Elaboración Propia.

4.1.3. Celda de Cara

El nodo de integración se ubica en el centroide de la cara triangular de un tetraedro que se encuentra en las caras de contorno del dominio. En esta ubicación, el nodo permite extraer mayor información de las condiciones de Neumann y Dirichlet. En la Figura 4.4 se observa el caso de una celda de cara tetraédrica.

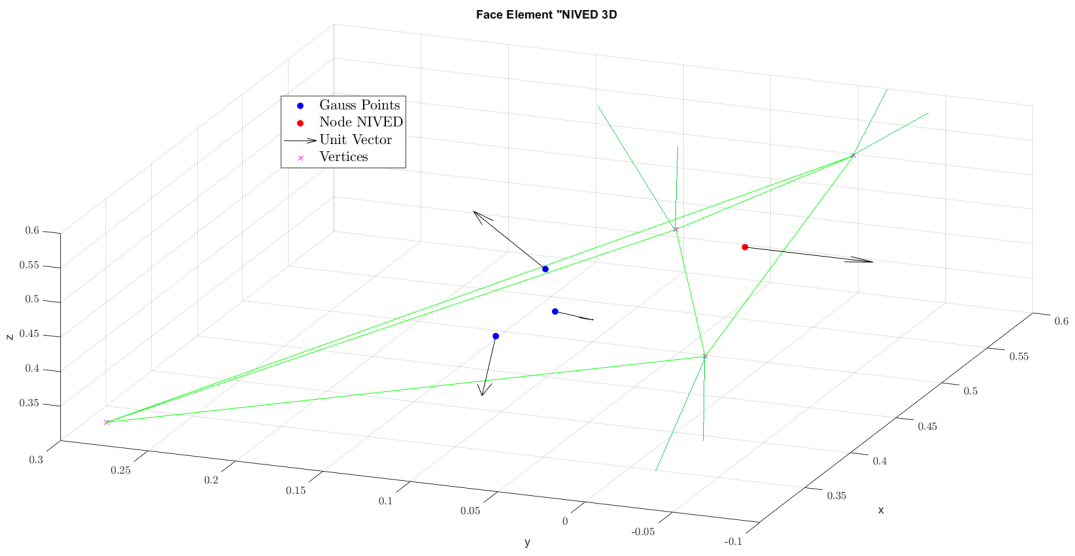


Figura 4.4: Celda tipo Cara. Caso de un tetraedro con 4 vértices y 4 caras triangulares. • indica la regla de Gauss con 1 punto sobre cada cara triangular. • el nodo de integración Nived tridimensional. → la normal unitaria hacia el exterior de cada cara triangular. ⊗ los vértices del poliedro. Fuente: Elaboración Propia.

4.1.4. Celda de Interior

El nodo de integración se ubica en el centroide de un tetraedro que se encuentra en el interior del sólido, en otras palabras, ningún vértice y/o cara está en el contorno del dominio. En esta ubicación, el nodo permite saber que sucede con las variables de estado dentro del sólido. En la Figura 4.5 se observa el caso de una celda de interior tetraédrica.

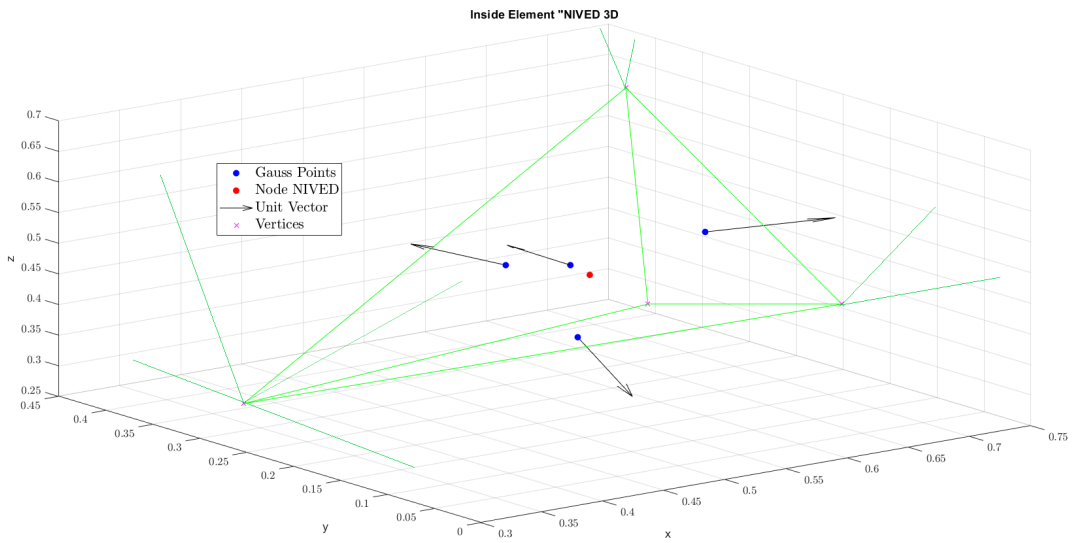


Figura 4.5: Celda tipo Interior. Caso de un tetraedro con 4 vértices y 4 caras triangulares. • indica la regla de Gauss con 1 punto sobre cada cara triangular. • el nodo de integración Nived tridimensional. → la normal unitaria hacia el exterior de cada cara triangular. ⊗ los vértices del poliedro. Fuente: Elaboración Propia.

4.2. Contribución Nodal

Dado que el método NIVED en extensión tridimensional, utiliza funciones de base sin malla para la discretización de las variables de campo, tenemos que considerar las contribuciones de los nodos vecinos al realizar la integración de Gauss sobre los bordes de la celda nodal (caras del poliedro). La lista de contribución nodal global en un punto de integración, se define como los índices globales de los nodos cuyas funciones de base toman un valor distinto de cero en el punto de integración. Etiquetamos estos índices globales de 1 a m y construimos una lista de contribución nodal local con ellos.

Siempre realizamos un seguimiento de la correspondencia entre las listas de contribución nodal local y global, ya que esta correspondencia se utiliza más adelante en el ensamblaje de la matriz de rigidez global y el vector de fuerzas global. La construcción de la lista de contribución nodal local se muestra esquemáticamente en la Figura 4.6 para la evaluación de funciones de base libre de malla en un punto de integración en el borde de una celda nodal poligonal, para el caso tridimensional los soportes son esféricos, pero teóricamente el esquema es el mismo.

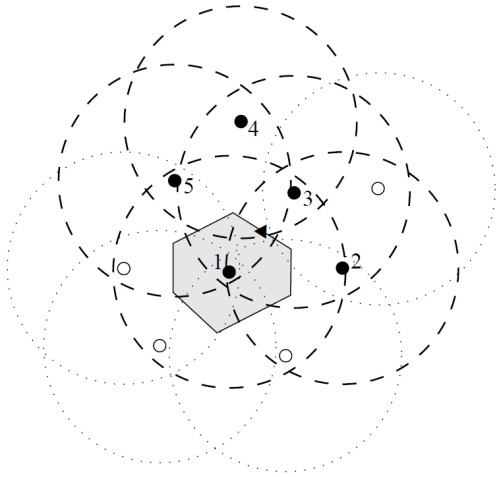


Figura 4.6: Construcción de la lista de contribución nodal local. Las funciones de base nodal se evalúan en el punto de integración ▲. Un círculo centrado en un nodo representa el soporte de la función de base nodal. La lista de contribución está formada por los nodos etiquetados del 1 al 5 ($m = 5$) ya que sus soportes (círculos formado por trazos) toman un valor distinto de cero en el punto de integración (es decir, contienen el punto de integración). Los círculos punteados no contienen el punto de integración y, por lo tanto, sus nodos no forman parte de la lista. Fuente: [11]

4.3. Descomposición del Elemento Virtual

Por motivos de notación, nos referimos a la subcelda $E_{\boldsymbol{n}_1}$ como E y la norma unitaria de la subcelda $\boldsymbol{n}_1$ como $\boldsymbol{n}$. Hay que tener en cuenta que la celda principal E de la Figura 4.1 está formada por la unión de todas las subceldas $E_{\boldsymbol{n}_i},\ i = 1, 2, ..., k$, donde k es el número de caras de la celda poliédrica E, siguiendo esto, se debe cumplir:

$$|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i|. \tag{4.1}$$

Debido a la naturaleza no polinomial de las funciones de base libre de malla de máxima entropía linealmente precisas, la aproximación del campo de desplazamiento que utiliza estas funciones contiene una parte polinomial lineal, más algunos términos no polinomiales adicionales. Sea $[\mathcal{P}(E)^3]$ el espacio de desplazamientos lineales sobre la celda nodal E.

Siguiendo la literatura VEM estándar (ver, por ejemplo, Referencia [54]) se define el siguiente operador de proyección en el espacio de desplazamiento lineal:

$$\Pi : \mathcal{V}^h|_E \to [\mathcal{P}(E)^3],\ \Pi\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\ \forall \boldsymbol{p} \in [\mathcal{P}(E)^3], \tag{4.2}$$

que permite la división de la aproximación libre de malla de los campos en su parte polinomial lineal y sus términos no polinomiales, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{u}^h = \Pi\boldsymbol{u}^h + (\boldsymbol{u}^h - \Pi\boldsymbol{u}^h), \tag{4.3a}$$

$$\boldsymbol{v}^h = \Pi\boldsymbol{v}^h + (\boldsymbol{v}^h - \Pi\boldsymbol{v}^h). \tag{4.3b}$$

La proyección Π es necesaria para satisfacer la siguiente condición de ortogonalidad:

$$a_E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}^h - \Pi \boldsymbol{v}^h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{p} \in [\mathcal{P}(E)^3], \ \boldsymbol{v}^h \in \mathcal{V}^h|_E. \tag{4.4}$$

Usando (4.3) y (4.4), obtenemos la siguiente descomposición de la forma bilineal local:

$$a_E(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h) = a_E(\Pi \boldsymbol{u}^h, \Pi \boldsymbol{v}^h) + a_E(\boldsymbol{u}^h - \Pi \boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h - \Pi \boldsymbol{v}^h). \tag{4.5}$$

El primer término en el lado derecho de (4.5) es computable ya que depende de los campos lineales. Sin embargo, el segundo término no es computable ya que depende de los términos no polinomiales. En el marco del VEM, el segundo término se aproxima mediante una forma bilineal que puede calcularse convenientemente adoptando la forma de un término de estabilización. Denotamos esta forma bilineal de estabilidad por s_E y reescribimos (4.5) como sigue:

$$a_E^h(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h) = a_E(\Pi \boldsymbol{u}^h, \Pi \boldsymbol{v}^h) + s_E(\boldsymbol{u}^h - \Pi \boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h - \Pi \boldsymbol{v}^h). \tag{4.6}$$

Nos referimos a (4.6) como la *descomposición de elementos virtuales*.

La descomposición de elementos virtuales está dotada de las siguientes propiedades cruciales para establecer la convergencia del VEM [9, 55]:

Para todo h y para todo E en $\mathcal{T}^h$

★ *Consistencia*: $\forall \boldsymbol{p} \in [\mathcal{P}(E)^3]$ y $\forall \boldsymbol{v}^h \in \mathcal{V}^h|_E$

$$a_E^h(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}^h) = a_E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}^h). \tag{4.7}$$

★ *Estabilidad*: Existen dos constantes $\alpha_* > 0$ y $\alpha^* > 0$, independiente de h y de E, tal que

$$\forall \boldsymbol{v}^h \in \mathcal{V}^h|_E, \quad \alpha_* a_E(\boldsymbol{v}^h, \boldsymbol{v}^h) \leq a_E^h(\boldsymbol{v}^h, \boldsymbol{v}^h) \leq \alpha^* a_E(\boldsymbol{v}^h, \boldsymbol{v}^h). \tag{4.8}$$

En vista de las propiedades anteriores, es sencillo reconocer que el primer término en el lado derecho de (4.6) proporciona consistencia (es decir, asegura la satisfacción del test de la parcela) y el segundo término brinda estabilidad. La propiedad de estabilidad (4.8) revela las condiciones necesarias que debe poseer s_E: debe ser simétrica y definida positiva en el kernel de Π para que la propiedad (4.8) se mantenga sin violar (4.7).

4.4. Operadores de Proyección

La forma explícita del operador de proyección Π se obtiene a partir de la condición de ortogonalidad (4.4). Dejando que el tensor de deformación (3.28) se escriba como

$$\varepsilon(\boldsymbol{v}) = \nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}), \tag{4.9}$$

donde $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})$ es el tensor de simetría sesgada dado por

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} - \nabla^\top \boldsymbol{v}). \tag{4.10}$$

Usando (4.9), observando que $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p})$ y $\nabla\Pi\boldsymbol{v}^h$ son campos constantes sobre E ya que $\boldsymbol{p}$, $\Pi\boldsymbol{v}^h \in [\mathcal{P}(E)^3]$, y que $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\omega} = 0$, podemos escribir la condición de ortogonalidad (4.4) como

$$\begin{aligned} a_E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}^h - \Pi\boldsymbol{v}^h) &= \int_E \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) : [\nabla(\boldsymbol{v}^h - \Pi\boldsymbol{v}^h) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}^h - \Pi\boldsymbol{v}^h)]d\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) : \left[\int_E \nabla\boldsymbol{v}^h d\boldsymbol{x} - \nabla\Pi\boldsymbol{v}^h \int_E d\boldsymbol{x}\right] \\ &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) : \left[\int_E \nabla\boldsymbol{v}^h d\boldsymbol{x} - |E|\nabla\Pi\boldsymbol{v}^h\right] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

lo que lleva a

$$\nabla\Pi\boldsymbol{v}^h = \frac{1}{|E|}\int_E \nabla\boldsymbol{v}^h d\boldsymbol{x}. \tag{4.12}$$

Tenga en cuenta que (4.12) define $\nabla\Pi\boldsymbol{v}^h$ como el valor promedio de $\nabla\boldsymbol{v}^h$ sobre la celda E. Al usar (4.9), (4.12) se puede reescribir como

$$\nabla\Pi\boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{\varepsilon}(\Pi\boldsymbol{v}^h) + \boldsymbol{\omega}(\Pi\boldsymbol{v}^h) = \frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x} + \frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}, \tag{4.13}$$

que al integrar rendimientos

$$\Pi\boldsymbol{v}^h = \left(\frac{1}{|E|}\int_E \varepsilon(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}\right)\cdot\boldsymbol{x} + \left(\frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}\right)\cdot\boldsymbol{x} + a_0. \tag{4.14}$$

Para determinar a_0 necesitamos un operador de proyección sobre las constantes $P_0 : \mathcal{V}^h|_E \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$P_0(\Pi\boldsymbol{v}^h) = P_0\boldsymbol{v}^h. \tag{4.15}$$

Dado que las variables de campo calculadas en el nodo de integración se convierten en las variables de campo representativas de la celda, definimos el operador de proyección en constante como

$$P_0\boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{v}^h(\boldsymbol{x}_E) = \boldsymbol{v}_E, \tag{4.16}$$

donde x_E son las coordenadas del nodo de integración (ver Figura 4.1).

Aplicando (4.15) en (4.14) se obtiene

$$\begin{aligned} P_0(\Pi\boldsymbol{v}^h) &= \left(\frac{1}{|E|}\int_E \varepsilon(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}\right)\cdot P_0\boldsymbol{x} + \left(\frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}\right)\cdot P_0\boldsymbol{x} + P_0 a_0 = P_0\boldsymbol{v}^h \\ &= \left(\frac{1}{|E|}\int_E \varepsilon(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}\right)\cdot\boldsymbol{x}_E + \left(\frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}\right)\cdot\boldsymbol{x}_E + a_0 = \boldsymbol{v}_E. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Al resolver para a_0 en (4.18), obtenemos

$$a_0 = \boldsymbol{v}_E - \left(\frac{1}{|E|}\int_E \varepsilon(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}\right)\cdot\boldsymbol{x}_E - \left(\frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}\right)\cdot\boldsymbol{x}_E. \tag{4.18}$$

Introducimos las definiciones $\varepsilon_E(\boldsymbol{v}^h) := \frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\omega}_E(\boldsymbol{v}^h) := \frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}^h)d\boldsymbol{x}$ ya que

ambos son tensores constantes sobre la celda y por lo tanto pueden asociarse con el nodo de integración. Finalmente, al sustituir (4.18) en (4.14) se obtiene el operador de proyección sobre los desplazamientos lineales, como:

$$\Pi \boldsymbol{v}^h = \varepsilon_E(\boldsymbol{v}^h) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_E) + \boldsymbol{\omega}_E(\boldsymbol{v}^h) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_E) + \boldsymbol{v}_E. \tag{4.19}$$

En (4.19), los promedios de celda $\varepsilon_E(\boldsymbol{v}^h)$ y $\boldsymbol{\omega}_E(\boldsymbol{v}^h)$ se evalúan en el límite de E invocando el teorema de divergencia, que da las siguientes medidas nodales:

$$\varepsilon_E(\boldsymbol{v}^h) = \frac{1}{|E|} \int_E \varepsilon(\boldsymbol{v}^h) d\boldsymbol{x} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} (\boldsymbol{v}^h \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{v}^h) ds, \tag{4.20}$$

y

$$\boldsymbol{\omega}_E(\boldsymbol{v}^h) = \frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}^h) d\boldsymbol{x} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} (\boldsymbol{v}^h \otimes \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{v}^h) ds, \tag{4.21}$$

respectivamente.

4.5. Matrices de Proyección

Después de algunas manipulaciones algebraicas, (4.19) se puede escribir como

$$\Pi \boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{v}^h) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{r}_E(\boldsymbol{v}^h), \tag{4.22}$$

donde

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} (x_1 - x_{1E}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x_2 - x_{2E}) & \frac{1}{2}(x_3 - x_{3E}) & 0 \\ 0 & (x_2 - x_{2E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_1 - x_{1E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_3 - x_{3E}) \\ 0 & 0 & (x_3 - x_{3E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_1 - x_{1E}) & \frac{1}{2}(x_2 - x_{2E}) \end{bmatrix}, \tag{4.23a}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x_2 - x_{2E}) & -\frac{1}{2}(x_3 - x_{3E}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}(x_1 - x_{1E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_3 - x_{3E}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(x_1 - x_{1E}) & -\frac{1}{2}(x_2 - x_{2E}) \end{bmatrix}, \tag{4.23b}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{v}^h) = \begin{bmatrix} (\varepsilon_E)_{11} & (\varepsilon_E)_{22} & (\varepsilon_E)_{33} & 2(\varepsilon_E)_{12} & 2(\varepsilon_E)_{13} & 2(\varepsilon_E)_{23} \end{bmatrix}^\top, \tag{4.24a}$$

$$\boldsymbol{r}_E(\boldsymbol{v}^h) = \begin{bmatrix} v_{1E} & v_{2E} & v_{3E} & 2(\boldsymbol{\omega}_E)_{12} & 2(\boldsymbol{\omega}_E)_{13} & 2(\boldsymbol{\omega}_E)_{23} \end{bmatrix}^\top. \tag{4.24b}$$

Usando las funciones de base libre de mallas, conduce a la siguiente representación discreta de (4.23):

$$\boldsymbol{h}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_a) = \boldsymbol{N} \boldsymbol{H}_E, \quad \boldsymbol{g}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_a) = \boldsymbol{N} \boldsymbol{G}_E, \tag{4.25}$$

donde

$$\boldsymbol{H}_E = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{H}_E)_1 \\ \vdots \\ (\boldsymbol{H}_E)_a \\ \vdots \\ (\boldsymbol{H}_E)_m \end{bmatrix}, \tag{4.26a}$$

$$(\boldsymbol{H}_E)_a = \begin{bmatrix} (x_{1a} - x_{1E}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x_{2a} - x_{2E}) & \frac{1}{2}(x_{3a} - x_{3E}) & 0 \\ 0 & (x_{2a} - x_{2E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_{1a} - x_{1E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_{3a} - x_{3E}) \\ 0 & 0 & (x_{3a} - x_{3E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_{1a} - x_{1E}) & \frac{1}{2}(x_{2a} - x_{2E}) \end{bmatrix}, \tag{4.26b}$$

$$\boldsymbol{G}_E = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{G}_E)_1 \\ \vdots \\ (\boldsymbol{G}_E)_a \\ \vdots \\ (\boldsymbol{G}_E)_m \end{bmatrix}, \tag{4.27a}$$

$$(\boldsymbol{G}_E)_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x_{2a} - x_{2E}) & -\frac{1}{2}(x_{3a} - x_{3E}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}(x_{1a} - x_{1E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_{3a} - x_{3E}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(x_{1a} - x_{1E}) & -\frac{1}{2}(x_{2a} - x_{2E}) \end{bmatrix}, \tag{4.27b}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_1 & \cdots & \boldsymbol{N}_a & \cdots & \boldsymbol{N}_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}_a = \begin{bmatrix} \phi_a & 0 & 0 \\ 0 & \phi_a & 0 \\ 0 & 0 & \phi_a \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

y reemplazando explícitamente $\boldsymbol{v}^h$ para la forma (3.1) en (4.24) da

$$\boldsymbol{\varepsilon}_E^h = \boldsymbol{\varepsilon}_E \left(\sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{v}_a \right) = \boldsymbol{W}_E^\top \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{r}_E^h = \boldsymbol{r}_E \left(\sum_{a=1}^{m} \phi_a(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{v}_a \right) = \boldsymbol{R}_E^\top \boldsymbol{q}, \tag{4.29}$$

donde

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^\top & \cdots & \boldsymbol{v}_a^\top & \cdots & \boldsymbol{v}_m^\top \end{bmatrix}^\top, \quad \boldsymbol{v}_a = \begin{bmatrix} v_{1a} & v_{2a} & v_{3a} \end{bmatrix}^\top, \tag{4.30}$$

$$\boldsymbol{W}_E = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{W}_E)_1 \\ \vdots \\ (\boldsymbol{W}_E)_a \\ \vdots \\ (\boldsymbol{W}_E)_m \end{bmatrix}, \tag{4.31a}$$

$$(\boldsymbol{W}_E)_a = \begin{bmatrix} q_{1a} & 0 & 0 & q_{2a} & q_{3a} & 0 \\ 0 & q_{2a} & 0 & q_{1a} & 0 & q_{3a} \\ 0 & 0 & q_{3a} & 0 & q_{1a} & q_{2a} \end{bmatrix}, \quad q_{ia} = \frac{1}{|E|} \int_{\partial E} \phi_a(\boldsymbol{x}) n_i ds, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.31b}$$

y

$$\boldsymbol{R}_E = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{R}_E)_1 \\ \vdots \\ (\boldsymbol{R}_E)_a \\ \vdots \\ (\boldsymbol{R}_E)_m \end{bmatrix}, \quad (\boldsymbol{R}_E)_a = \begin{bmatrix} \phi_a^E & 0 & 0 & q_{2a} & -q_{3a} & 0 \\ 0 & \phi_a^E & 0 & -q_{1a} & 0 & q_{3a} \\ 0 & 0 & \phi_a^E & 0 & q_{1a} & -q_{2a} \end{bmatrix}, \tag{4.32}$$

donde $\phi_a^E := \phi_a(\boldsymbol{x}_E)$ es el valor de la función de base a-ésima en el nodo de integración E. Para evaluar q_{ia} en (4.31), se usa una regla de Gauss de 1 punto en cada borde de la celda nodal (ver Figura 4.1). Finalmente, al sustituir (4.25) y (4.29) en (4.22) se obtiene la siguiente versión discreta del operador de proyección:

$$\Pi \boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{N}\boldsymbol{H}_E\boldsymbol{W}_E^\top \boldsymbol{q} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{G}_E\boldsymbol{R}_E^\top \boldsymbol{q} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{H}_E\boldsymbol{W}_E^\top + \boldsymbol{G}_E\boldsymbol{R}_E^\top)\boldsymbol{q}, \tag{4.33}$$

que define la matriz de proyección (la forma matricial de Π) como

$$\boldsymbol{P}_E = \boldsymbol{H}_E\boldsymbol{W}_E^\top + \boldsymbol{G}_E\boldsymbol{R}_E^\top. \tag{4.34}$$

4.6. Matriz de Rigidez Elemental NIVED en $\mathbb{R}^3$

La matriz de rigidez local integrada nodal se obtiene discretizando la descomposición del elemento virtual (4.6). Comenzamos trabajando en el término de consistencia (es decir, el primer término del lado derecho de (4.6)). Al usar (4.19) para obtener $\nabla \Pi \boldsymbol{v}^h = \varepsilon_E(\boldsymbol{v}^h) + \boldsymbol{\omega}_E(\boldsymbol{v}^h)$ y considerando la relación constitutiva $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^h) = \mathcal{D} : \varepsilon_E(\boldsymbol{u}^h)$, podemos escribir

$$\begin{aligned} a_E(\Pi \boldsymbol{u}^h, \Pi \boldsymbol{v}^h) &= |E| \boldsymbol{\sigma}(\Pi \boldsymbol{u}^h) : \nabla \Pi \boldsymbol{v}^h \\ &= |E| \varepsilon_E(\boldsymbol{v}^h) : \mathcal{D} : \varepsilon_E(\boldsymbol{u}^h). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Usando la simetría de los tensores $\boldsymbol{\varepsilon}_E$ y $\mathcal{D}$, (4.35) se puede escribir en notación de Voigt como

$$a_E(\Pi \boldsymbol{u}^h, \Pi \boldsymbol{v}^h) = |E| \boldsymbol{\varepsilon}_E^\top(\boldsymbol{v}^h) \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{u}^h), \tag{4.36}$$

donde $\boldsymbol{D}$ es la matriz constitutiva de un material elástico lineal isotrópico en condiciones tridimensionales, está dada por

$$\boldsymbol{D} = \frac{E_Y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

donde E_Y es el módulo de Young y ν es la relación de Poisson; $\boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{v}^h)$ se define en (4.24).

Ahora, la sustitución de la versión discreta de $\boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{v}^h)$ como se indica en (4.29) dentro de

(4.36) conduce a la siguiente forma bilineal de consistencia local discreta:

$$a_E(\Pi \boldsymbol{u}^h, \Pi \boldsymbol{v}^h) = \boldsymbol{q}^\top |E| \boldsymbol{W}_E \boldsymbol{D} \boldsymbol{W}_E^\top \boldsymbol{d}, \tag{4.38}$$

donde $\boldsymbol{d}$ es un vector de columna similar a $\boldsymbol{q}$ dado en (4.30) que contiene los coeficientes nodales asociados a las funciones de prueba de desplazamiento.

La forma bilineal de estabilidad local discreta se obtiene reemplazando las discretizaciones de campo $\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{N}\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{N}\boldsymbol{q}$, donde $\boldsymbol{N}$ se define en (4.28), junto con (4.33) en el segundo término del lado derecho de (4.6). Esto produce

$$\begin{aligned} s_E(\boldsymbol{u}^h - \Pi \boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h - \Pi \boldsymbol{v}^h) &= s_E(\boldsymbol{N}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{P}_E\boldsymbol{d}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{P}_E\boldsymbol{q}) \\ &= \boldsymbol{q}^\top (\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E)^\top \boldsymbol{S}_E (\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E)\boldsymbol{d}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

donde $\boldsymbol{I}_{3m}$ es la matriz de identidad $(3m \times 3m)$ y $\boldsymbol{S}_E = s_E(\boldsymbol{N}^\top, \boldsymbol{N})$. Así, sustituyendo (4.38) y (4.39) en el primer y segundo términos en el lado derecho de (4.6), respectivamente, se obtiene

$$a_E(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h) = \boldsymbol{q}^\top \left(|E| \boldsymbol{W}_E \boldsymbol{D} \boldsymbol{W}_E^\top + (\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E)^\top \boldsymbol{S}_E (\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E) \right) \boldsymbol{d}, \tag{4.40}$$

que define la matriz de rigidez local integrada nodalmente como la suma de la matriz de rigidez de consistencia $\boldsymbol{K}_E^c$ y la matriz de rigidez de estabilidad $\boldsymbol{K}_E^S$, como sigue:

$$\boldsymbol{K}_E = \boldsymbol{K}_E^c + \boldsymbol{K}_E^S, \quad \boldsymbol{K}_E^c = |E| \boldsymbol{W}_E \boldsymbol{D} \boldsymbol{W}_E^\top, \quad \boldsymbol{K}_E^S = (\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E)^\top \boldsymbol{S}_E (\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E). \tag{4.41}$$

En cuanto a la rigidez de la estabilidad, hacemos la siguiente elección para $\boldsymbol{S}_E$:

$$\boldsymbol{S}_E = \boldsymbol{I}_{3m} \odot (\boldsymbol{1}_{3m} \otimes \boldsymbol{\gamma}), \tag{4.42}$$

donde $\boldsymbol{1}_{3m}$ es el vector de columna unitario $(3m \times 1)$, $\boldsymbol{\gamma} = \max(\boldsymbol{I}_{3m}, diag(\boldsymbol{K}_E^c))$ es un vector de columna que contiene la diagonal de la matriz $\boldsymbol{K}_E^c$ y $\odot$ es el producto por elementos. Esto significa que $\boldsymbol{S}_E$ es una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son las de la diagonal de la matriz de rigidez de consistencia local integrada nodalmente, que está en el espíritu de la "D-recipe" estudiada en las Referencias [56, 57].

4.7. Vector de Fuerzas Elemental NIVED en $\mathbb{R}^3$

Para campos lineales, la aproximación más simple para el vector de fuerza de cuerpo se construye proyectando tanto el vector de fuerza de cuerpo $\boldsymbol{b}$ y los desplazamientos de prueba $\boldsymbol{v}^h$ en constantes, como sigue [9, 55, 58]:

$$\ell_{b,E}^h(\boldsymbol{v}^h) = \int_E P_0 \boldsymbol{b}^h \cdot P_0 \boldsymbol{v}^h d\boldsymbol{x} = P_0 \boldsymbol{b}^h \cdot P_0 \boldsymbol{v}^h \int_E d\boldsymbol{x} = |E| \boldsymbol{b}_E \cdot \boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{q}^\top |E| \boldsymbol{N}_E^\top \boldsymbol{b}_E, \tag{4.43}$$

donde hemos utilizado P_0 como se define en (4.16), y

$$\boldsymbol{N}_E = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{N}_E)_1 & \cdots & (\boldsymbol{N}_E)_a & \cdots & (\boldsymbol{N}_E)_m \end{bmatrix}, \quad (\boldsymbol{N}_E)_a = \begin{bmatrix} \phi_a^E & 0 & 0 \\ 0 & \phi_a^E & 0 \\ 0 & 0 & \phi_a^E \end{bmatrix}, \tag{4.44}$$

donde ϕ_a^E se define abajo de (4.32) . Por tanto, el vector de fuerza de cuerpo nodal viene dado por

$$\boldsymbol{f}_{b,E} = |E|\boldsymbol{N}_E^\top \boldsymbol{b}_E, \tag{4.45}$$

que coincide con la integración directa del vector de fuerza de cuerpo en el nodo con coordenadas $\boldsymbol{x}_E$.

La integral que define el vector de fuerzas de tracción es similar a la integral que define el vector de fuerzas de cuerpo, pero es una dimensión más baja. Esto significa que simplemente podemos aplicar una integración nodal directa en los contornos de Neumann. Proceder de la misma manera conduce al siguiente vector de fuerzas de tracción nodal:

$$\boldsymbol{f}_{t,S} = |S|\boldsymbol{N}_S^\top \bar{\boldsymbol{t}}_S, \tag{4.46}$$

donde

$$\boldsymbol{N}_S = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{N}_S)_1 & \cdots & (\boldsymbol{N}_S)_a & \cdots & (\boldsymbol{N}_S)_m \end{bmatrix}, \quad (\boldsymbol{N}_S)_a = \begin{bmatrix} \phi_a^S & 0 & 0 \\ 0 & \phi_a^S & 0 \\ 0 & 0 & \phi_a^S \end{bmatrix}, \tag{4.47}$$

con $\phi_a^S := \phi_a(\boldsymbol{x}_S)$. Finalmente el vector de fuerzas elemental para un elemento, está dado por

$$\boldsymbol{f}_E = \boldsymbol{f}_{b,E} + \boldsymbol{f}_{t,S} = |E|\boldsymbol{N}_E^\top \boldsymbol{b}_E + |S|\boldsymbol{N}_S^\top \bar{\boldsymbol{t}}_S. \tag{4.48}$$

4.8. Normas de Convergencia NIVED en $\mathbb{R}^3$

La norma L^2 relativa del error en los desplazamientos, en el contexto de integración nodal, se define como

$$\frac{\left\|\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}^h\right\|_{L^2(\Omega)}}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}} = \sqrt{\frac{\sum_E \int_E (\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}^h)^\top (\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}^h)\ d\boldsymbol{x}}{\sum_E \int_E \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}\ d\boldsymbol{x}}}, \tag{4.49}$$

y la semi-norma H^1 relativa del error en la energía en el contexto de integación nodal es

$$\frac{\left\|\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}^h\right\|_{H^1(\Omega)}}{\|\boldsymbol{u}\|_{H^1(\Omega)}} = \sqrt{\frac{\sum_E \int_E (\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{u}^h))^\top \boldsymbol{D}\ (\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{u}^h))\ d\boldsymbol{x}}{\sum_E \int_E \varepsilon(\boldsymbol{u})^\top \boldsymbol{D}\ \varepsilon(\boldsymbol{u})\ d\boldsymbol{x}}}, \tag{4.50}$$

donde la deformación aparece en notación de Voigt y $\varepsilon(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{u}^h) = \varepsilon(\boldsymbol{u}^h)$. Los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos se evalúan directamente sobre los nodos y el superíndice ^{h} indica la aproximación numérica, por lo tanto, la otra variable se relaciona con la ecuación exacta.

Capítulo 5

Extensión al Análisis no Lineal: Caso Viscoelástico

En esta sección, el esquema NIVED en tres dimensiones propuesto, se extiende a problemas de mecánica de sólidos en los que la ley constitutiva del material sólido depende de la historia de la deformación. En particular, consideramos el caso del modelo viscoelástico de Maxwell Generalizado que describe un sólido isotrópico lineal estándar [59], en el que el esfuerzo de Cauchy en forma vectorial y en función del tiempo t se divide como

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{m}K\boldsymbol{m}^\top\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{5.1}$$

donde K es el módulo Bulk del material, $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el pequeño tensor de deformación en forma vectorial, $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^\top$ y $\boldsymbol{s}(t)$ es el esfuerzo desviador dado por

$$\boldsymbol{s}(t) = \int_{-\infty}^{t} 2G(t-t')\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t'}dt', \tag{5.2}$$

$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^\top\boldsymbol{\varepsilon}$ es la deformación desviadora y $G(t)$ es el módulo de relajación de corte dado por una serie de Prony de un término que tiene la forma

$$G(t) = G\left[\mu_0 + \mu_1 \exp\left(\frac{-t}{\lambda_1}\right)\right], \tag{5.3}$$

$G = \frac{E_Y}{2(1+\nu)}$, $\mu_0 > 0$ y $\mu_1 > 0$ son parámetros que satisfacen $\mu_0 + \mu_1 = 1$, y λ_1 es un tiempo de relajación. Sustituyendo (5.3) en (5.2) conduce a

$$\boldsymbol{s}(t) = 2G\left[\mu_0\boldsymbol{e}(t) + \mu_1\boldsymbol{q}^{(1)}(t)\right], \tag{5.4}$$

$\boldsymbol{q}^{(1)}(t)$ es la deformación desviadora parcial adimensional dada por

$$\boldsymbol{q}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left(\frac{-(t-t')}{\lambda_1}\right)\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t'}dt'. \tag{5.5}$$

El término $\boldsymbol{q}^{(1)}(t)$ es resuelto usando la fórmula de recursión [59]

$$\boldsymbol{q}_{n+1}^{(1)} = \exp\left(\frac{-\Delta t}{\lambda_1}\right)\boldsymbol{q}_n^{(1)} + \Delta\boldsymbol{q}_{n+1}^{(1)}, \tag{5.6}$$

donde

$$\Delta\boldsymbol{q}_{n+1}^{(1)} = \frac{\lambda_1}{\Delta t}\left(1 - \exp\left(\frac{-\Delta t}{\lambda_1}\right)\right)(\boldsymbol{e}_{n+1} - \boldsymbol{e}_n)\,. \tag{5.7}$$

Por lo tanto, utilizando la fórmula de recursividad, los esfuerzos se pueden escribir como

$$\boldsymbol{s}_{n+1} = 2G\left[\mu_0\boldsymbol{e}_{n+1} + \mu_1\boldsymbol{q}_{n+1}^{(1)}\right], \tag{5.8}$$

y

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{s}_{n+1} + \boldsymbol{m}K\boldsymbol{m}^\top\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}. \tag{5.9}$$

Al considerar (5.9) junto con (5.8) y (5.6), se observa que $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ está determinado por el conocimiento del incremento de tiempo Δt y la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ en los tiempos t_n y t_{n+1}.

La solución numérica de la ecuación de equilibrio para el sólido isotrópico lineal estándar descrito por el modelo viscoelástico de Maxwell generalizado se busca de forma incremental utilizando un esquema de Newton-Raphson. En el marco de NIVED extrendido a tres dimensiones, la ecuación constitutiva (5.9) se calcula utilizando la forma vectorial de la deformación nodal (4.20) y la ecuación de equilibrio de base para el esquema de Newton-Raphson se obtiene linealizando la siguiente representación VED del trabajo virtual:

$$\begin{aligned}&|E|\boldsymbol{\varepsilon}_E^\top(\boldsymbol{v}^h)\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{u}_{n+1}^h)) + \int_E[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{v}^h)]^\top\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{n+1}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{u}_{n+1}^h))d\boldsymbol{x}\\ &- |E|(P_0\boldsymbol{v}^h)^\top\boldsymbol{b}_E - |S|(P_0\boldsymbol{v}^h)^\top\bar{\boldsymbol{t}}_S = 0.\end{aligned} \tag{5.10}$$

La linealización de (5.10) produce

$$\begin{aligned}&|E|\boldsymbol{\varepsilon}_E^\top(\boldsymbol{v}^h)\boldsymbol{D}_\top|_{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_E(\Delta\boldsymbol{u}^h) + \int_E[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{v}^h)]^\top\boldsymbol{D}_\top|_{n+1}[\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\boldsymbol{u}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}_E(\Delta\boldsymbol{u}^h)]d\boldsymbol{x}\\ &= -[|E|\boldsymbol{\varepsilon}_E^\top(\boldsymbol{v}^h)\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{u}_{n+1}^h)) + \int_E[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{v}^h)]^\top\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{n+1}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{u}_{n+1}^h))d\boldsymbol{x}\\ &- |E|(P_0\boldsymbol{v}^h)^\top\boldsymbol{b}_E - |S|(P_0\boldsymbol{v}^h)^\top\bar{\boldsymbol{t}}_S],\end{aligned} \tag{5.11}$$

donde $\boldsymbol{D}_\top$ es el módulo tangente que se obtiene derivando (5.9), como sigue:

$$\boldsymbol{D}_\top|_{n+1} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = 2G\left[\mu_0 + \mu_1\frac{\lambda_1}{\Delta t}\left(1 - \exp\left(\frac{-\Delta t}{\lambda_1}\right)\right)\right]\left[\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^\top\right] + K\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^\top. \tag{5.12}$$

Adoptando el mismo argumento utilizado para obtener la descomposición VED (4.6), aproximamos el segundo término en ambos lados de (5.11) por cantidades computables, dando así

$$\begin{aligned}&|E|\boldsymbol{\varepsilon}_E^\top(\boldsymbol{v}^h)\boldsymbol{D}_\top|_{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_E(\Delta\boldsymbol{u}^h) + s_{E,T}(\boldsymbol{v}^h - \Pi\boldsymbol{v}^h, \Delta\boldsymbol{u}^h - \Pi\Delta\boldsymbol{u}^h)\\ &= -[|E|\boldsymbol{\varepsilon}_E^\top(\boldsymbol{v}^h)\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + s_E(\boldsymbol{v}^h - \Pi\boldsymbol{v}^h, \boldsymbol{u}^h - \Pi\boldsymbol{u}^h) - |E|(P_0\boldsymbol{v}^h)^\top\boldsymbol{b}_E - |S|(P_0\boldsymbol{v}^h)^\top\bar{\boldsymbol{t}}_S].\end{aligned} \tag{5.13}$$

Observamos que el trabajo virtual linealizado (5.13) está respaldado por el marco de elementos virtuales para el análisis inelástico presentado en la Referencia [58]. Después de discretizar (5.13), confiar en la arbitrariedad de las variaciones nodales y sumar sobre todas las celdas, finalmente obtenemos las siguientes iteraciones de Newton-Raphson para resolver el estado de equilibrio $\boldsymbol{d}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{d}_{n+1}^{(k-1)} + \Delta\boldsymbol{d}^{(k)}$ en el tiempo t_{n+1} con un incremento de tiempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$:

$$\sum_{E\in\mathcal{T}^h} \left(\boldsymbol{K}_{E,\top}^c + \boldsymbol{K}_{E,\top}^s\right)_{n+1}^{(k-1)} \Delta\boldsymbol{d}^{(k)} = -\sum_{E\in\mathcal{T}^h,\ S\in\varepsilon^h} (\boldsymbol{f}_E^c + \boldsymbol{f}_E^s - \boldsymbol{f}_{b,E} - \boldsymbol{f}_{t,S})_{n+1}^{(k-1)}, \tag{5.14a}$$

$$\boldsymbol{K}_{E,\top}^c = |E|\boldsymbol{W}_E\boldsymbol{D}_\top|_{n+1}\boldsymbol{W}_E^\top, \quad \boldsymbol{K}_{E,\top}^s = (\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E)^\top \boldsymbol{I}_{3m} \odot (\boldsymbol{1}_{3m} \otimes \boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E), \tag{5.14b}$$

$$\boldsymbol{f}_E^c = |E|\boldsymbol{W}_E\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \quad \boldsymbol{f}_E^s = (\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E)^\top \boldsymbol{I}_{3m} \odot (\boldsymbol{1}_{3m} \otimes \boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{I}_{3m} - \boldsymbol{P}_E)\boldsymbol{d}_{n+1}^{(k-1)}, \tag{5.14c}$$

$$\boldsymbol{f}_{b,E} = |E|\boldsymbol{N}_E^\top \boldsymbol{b}_E, \quad \boldsymbol{f}_{t,S} = |S|\boldsymbol{N}_S^\top \bar{\boldsymbol{t}}_S, \tag{5.14d}$$

donde $\boldsymbol{\gamma} = \max(\boldsymbol{I}_{3m}, diag(\boldsymbol{K}_{E,\top}^c)$, $\boldsymbol{W}_E$, $\boldsymbol{P}_E$, $\boldsymbol{I}_{3m}$, $\boldsymbol{1}_{3m}$, $\boldsymbol{N}_E$, $\boldsymbol{N}_S$, $\boldsymbol{b}_E$ y $\bar{\boldsymbol{t}}_S$ son los mismos que se utilizan en la formulación lineal NIVED en extensión tridimensional (véase el Capítulo 4).

Finalmente, la notación de Voigt que se usa en esta tesis para el caso viscoelástico del vector de deformaciones es $\boldsymbol{\varepsilon}_E(\boldsymbol{v}^h) = \begin{bmatrix}(\varepsilon_E)_{11} & (\varepsilon_E)_{22} & (\varepsilon_E)_{33} & 2(\varepsilon_E)_{12} & 2(\varepsilon_E)_{23} & 2(\varepsilon_E)_{13}\end{bmatrix}^\top$, esta notación, se diferencia en las tres últimas variables de deformación en corte del caso de elasticidad lineal (ver ecuación (4.24a)). En consecuencia, para el caso viscoelástico NIVED tridimensional, las matrices $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_E$, $\boldsymbol{r}_E$, $\boldsymbol{H}_E$, $\boldsymbol{G}_E$, $\boldsymbol{W}_E$ y $\boldsymbol{R}_E$ (ver ecuaciones (4.23), (4.24), (4.26b), (4.27b), (4.31b) y (4.32)), deben reordenarse para representar la notación Voigt utilizada en el Capítulo 4.

Capítulo 6

Ejemplos Numéricos y Discusión

En este capítulo, se presentan experimentos numéricos para demostrar la consistencia, estabilidad y convergencia del método de integración nodal para mallas tetraédricas usando la descomposición del elemento virtual. Algunos resultados se comparan con un método de Galerkin sin malla que utiliza funciones de base de máxima entropía utilizando la descomposición del elemento virtual, adoptando el acrónimo MEMVED. Cuando es posible, también proporcionamos comparaciones de nuestros resultados con soluciones de referencia obtenidas con el método sin malla de máxima entropía (MEM). Además para el caso viscoelástico se usan las soluciones de referencia del método FEM con el fin de corroborar la solución y el método. En los cálculos MEMVED y NIVED tridimensional, se utilizan las siguientes reglas de cuadratura para la integración numérica sobre una malla de fondo de celdas tetraédricas de cuatro nodos: Regla de Gauss de 1 punto en cada cara de la celda (punto de Gauss de superficie) para calcular las integrales de superficie que aparecen en las matrices de rigidez de consistencia y estabilidad. En el método libre de malla de máxima entropía estándar (MEM), la matriz de rigidez contiene la integral de volumen habitual y, por lo tanto, se integra numéricamente utilizando la integración de Gauss estándar dentro de cada celda, en particular se usan 1, 4, 10 y 24 puntos de integración. La construcción de las celdas de base tetraédrica y poliédricas nodales representativas para el método NIVED tridimensional se llevan a cabo utilizando el método de construcción representado en la Figuras 4.1 y 3.3. Todo esto permite una comparación directa entre los métodos NIVED, MEMVED y MEM, ya que se usa un número de grados de libertad del mismo orden en todos los métodos mencionados. Tenga en cuenta que en los puntos de Gauss de la superficie solo se calculan las funciones de base; no se necesitan derivadas.

Las funciones de base de máxima entropía en los métodos NIVED , MEMVED y MEM se realizan usando $\gamma = 2.0$ en todos los experimentos numéricos que siguen. Para el caso NIVED tridimensional, además, se evalúan las funciones de base de mínimos cuadrados móviles modificados con un parámetro de soporte de radio $\eta = 0.5$.

6.1. Test de la Parcela en Desplazamiento Para $\mathbb{R}^3$

Resolvemos el problema del valor de contorno (3.26) para el test de la parcela que se representa esquemáticamente en la Figura 6.2. Se supone una condición de estado de tensión para el caso tridimensional con los siguientes parámetros del material: $E_Y = 10^7$ psi y $\nu = 0.3$. La solución exacta para este problema, es el campo lineal $u_{exact} = [x;\ x + y;\ x + y + z]$.

Las condiciones de contorno de Dirichlet se imponen de la siguiente manera: en todo el contorno, se fija el desplazamiento en la tres direcciones según la solución exacta u_{exact}. Las condiciones de contorno de Neumann son $\bar{\boldsymbol{t}} = [0\ 0\ 0]^\top$ en todo el contorno, por otra parte el vector de fuerzas de cuerpo se considera nulo; $\boldsymbol{b} = [0\ 0\ 0]^\top$ en todo el dominio. La función de ponderación previa de Gauss se utiliza para las funciones de base de máxima entropía y una restrición de peso $w = 0.01\,[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$ para las funciones de base de mínimos cuadrados móviles modificados. Las mallas utilizadas en este estudio se representan en la Figura 6.1 . Los resultados numéricos para el error relativo en la norma L^2 y la seminorma H^1 se presentan en las Tablas 6.1 y 6.2, respectivamente, para los enfoques MEM, MEMVED y NIVED. Los resultados numéricos confirman que la prueba de parche se cumple con la precisión de la máquina solo para el método NIVED y MEMVED, usando las funciones de base de máxima entropía.

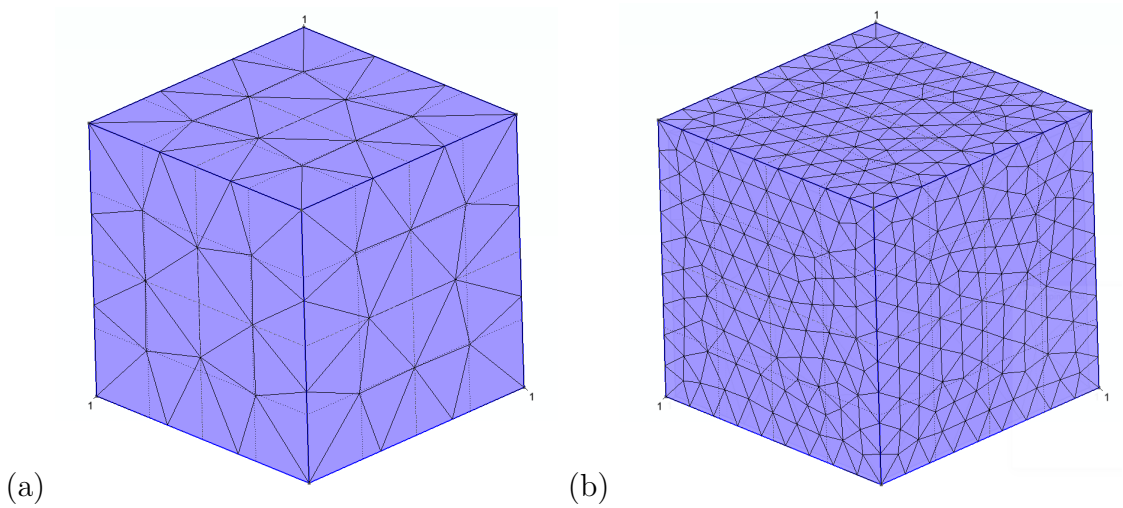


Figura 6.1: Secuencia de mallas utilizadas para el Test de la Parcela. (a) Malla no estructurada de 380 elementos y $h_{max} = 0.14$ in, (b) malla no estructurada de 1125 elementos y $h_{max} = 0.095$ in. Fuente: Elaboración Propia.

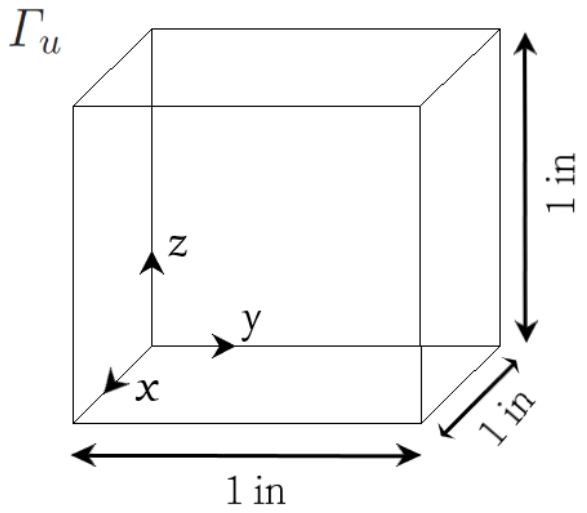


Figura 6.2: Problema del Test de la Parcela en Desplazamiento. Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 6.1: Error relativo en la norma L^2 para el Test de la Parcela.

Método	Regla de Gauss	Unstructured Mesh
MEM	1-pt	5.5×10^{-2}
MEM	4-pt	1.5×10^{-2}
MEM	10-pt	5.7×10^{-3}
MEM	24-pt	2.8×10^{-3}
MEM-VED (maxent)	1-pt/1-pt	1.6×10^{-12}
NIVED3D (maxent)	1-pt/1-pt	1.4×10^{-13}
NIVED3D (mmls)	1-pt/1-pt	8.0×10^{-3}

Tabla 6.2: Error relativo en la semi norma H^1 para el Test de la Parcela.

Método	Regla de Gauss	Unstructured Mesh
MEM	1-pt	7.1×10^{-1}
MEM	4-pt	2.3×10^{-1}
MEM	10-pt	8.8×10^{-2}
MEM	24-pt	4.9×10^{-2}
MEM-VED (maxent)	1-pt/1-pt	7.7×10^{-12}
NIVED3D (maxent)	1-pt/1-pt	1.8×10^{-12}
NIVED3D (mmls)	1-pt/1-pt	4.0×10^{-2}

6.2. Estrato Elástico Infinito.

Consideramos el problema de un estrato elástico infinito sujeto a una presión uniforme en la superficie superior como se muestra en la Figura 6.3. Además, el campo gravitacional

de magnitud $g = 9.8\ [\frac{m}{s^2}]$ actúa sobre el estrato. La altura del estrato es $h = 1$ m y la presión uniforme es $q = 10^6$ Pa. Dada la longitud infinita a lo largo de las direcciones x, y, z, el estrato se corta a través de los planos $(3, y, z)$ y $(x, y, 3)$, lo que da como resultado un dominio de análisis cuyas dimensiones son $3 \times 1 \times 3$. Consideramos una secuencia de mallas no estructuradas, que se muestra en la Figura 6.4. La solución exacta para este problema se obtiene de la Referencia [60]:

$$\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{u}_z = \mathbf{0}, \tag{6.1a}$$

$$\boldsymbol{u}_y = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\left(-qy - \frac{\rho g}{2}(h^2 - (h-y)^2)\right), \tag{6.1b}$$

donde el módulo de Young es $E_y = 4 \times 10^7$ Pa, el coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, y la densidad del estrato es $\rho = 1900\ [\frac{Kg}{m^2}]$. La solución exacta $u_x = 0$ se aplica en el límite $x = 3$ y la solución exacta $u_z = 0$ en el límite en $z = 3$. Aunque el estrato elástico infinito se puede resolver fácilmente usando un modelo unidimensional, ilustra la gran cantidad errores numéricos que introduce la integración estándar de Gauss en tres dimensiones.

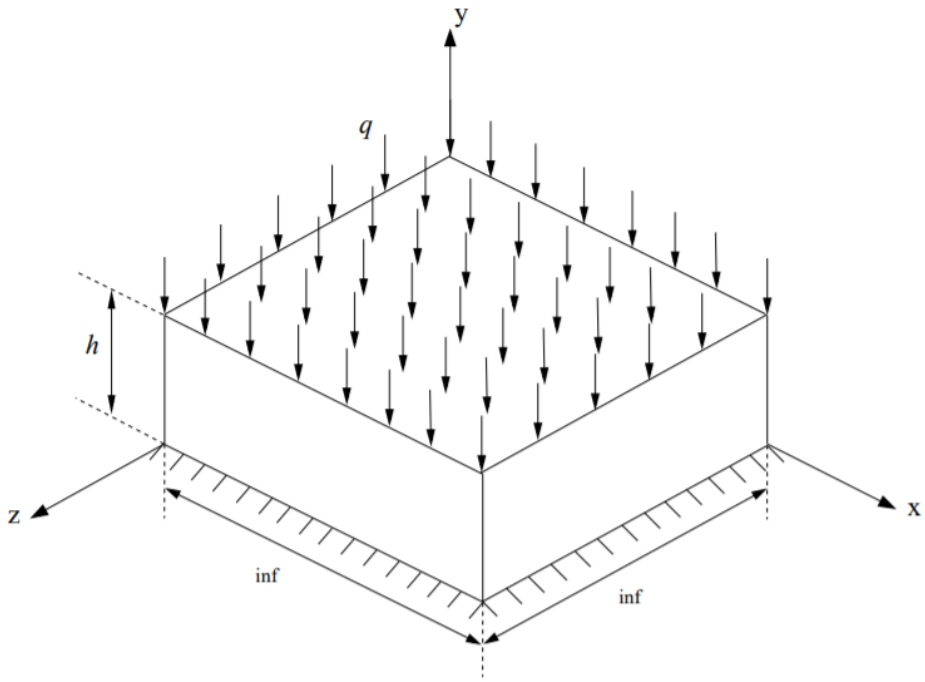


Figura 6.3: Geometría del modelo y condiciones de contorno para el problema del Estrato Elástico Infinito. Fuente: [61]

Se lleva a cabo un estudio para comparar las tasas de convergencia que entrega el método NIVED en el caso tridimensional usando las funciones maxent y mmls sobre el refinamiento de la malla. El parámetro de soporte de la función base se establece en $\gamma = 2,0$ para la función de ponderación previa gaussiana y un parámetro de soporte de radio $\eta = 0.5$ para el prior cuadrático de las funciones mmls. La Figura 6.5 presenta las tasas de convergencia para los enfoques NIVED usando maxent y mmls. Se observa que las tasas óptimas de convergencia son proporcionadas por la formulación NIVED usando maxent, tanto en la norma relativa L^2 como en la seminorma H^1. Para el enfoque MEM, según [61], la convergencia no solo es

errática para la secuencia completa de las reglas de Gauss (incluso una regla de Gauss de 24 puntos es inadecuada), sino que también muestra poca precisión. Este es un comportamiento algo esperado ya que los errores de integración son significativamente más pronunciados en tres dimensiones [62]. Hacemos hincapié en que en tres dimensiones, la formulación NIVED solo necesita un total de n puntos de Gauss como n caras tiene el poliedro para evaluar la función de base (no se necesitan derivadas) en las caras de la celda, lo que se puede aprovechar para la eficiencia computacional.

La Figura 6.6 proporciona el costo computacional de la formulación NIVED propuesta usando las funciones de base maxent y mmls. Se observa que para el mismo tiempo de CPU, el enfoque NIVED usando maxent ofrece una precisión mucho mayor, por lo tanto, este ejemplo revela el mejor desempeño de la formulación NIVED usando maxent desde el punto de vista de precisión y convergencia, y un desempeño alto de la formulación NIVED usando mmls desde el punto de vista de costo computacional, permitiendo resolver problemas más rápidos con comportamientos muy parecidos al real analítico, pero con errores de convergencia asociados al problema de imposición de condiciones.

Finalmente, en la Figura 6.7, presentamos la solución exacta del desplazamiento para la malla 6.4e de 9369 elementos y 28107 grados de libertad. Por otra parte, en la Figura 6.8 se observa la solución numérica del desplazamiento para tres de las mallas no estructuradas de la Figura 6.4, usando las funciones maxent y mmls. Existe una convergencia de la solución para ambos casos, pero para la malla más gruesa de 235 elementos usando mmls Figura 6.4e, la solución gráfica numérica no converge correctamente, pero para las mallas que siguen, la solución si se observa que converge bien y suave. Para el caso de las funciones maxent, la solución siempre es suave. Por otra parte, para ambos casos, a medida que la malla se va refinando, las soluciones van siendo más cercanas a la solución analítica.

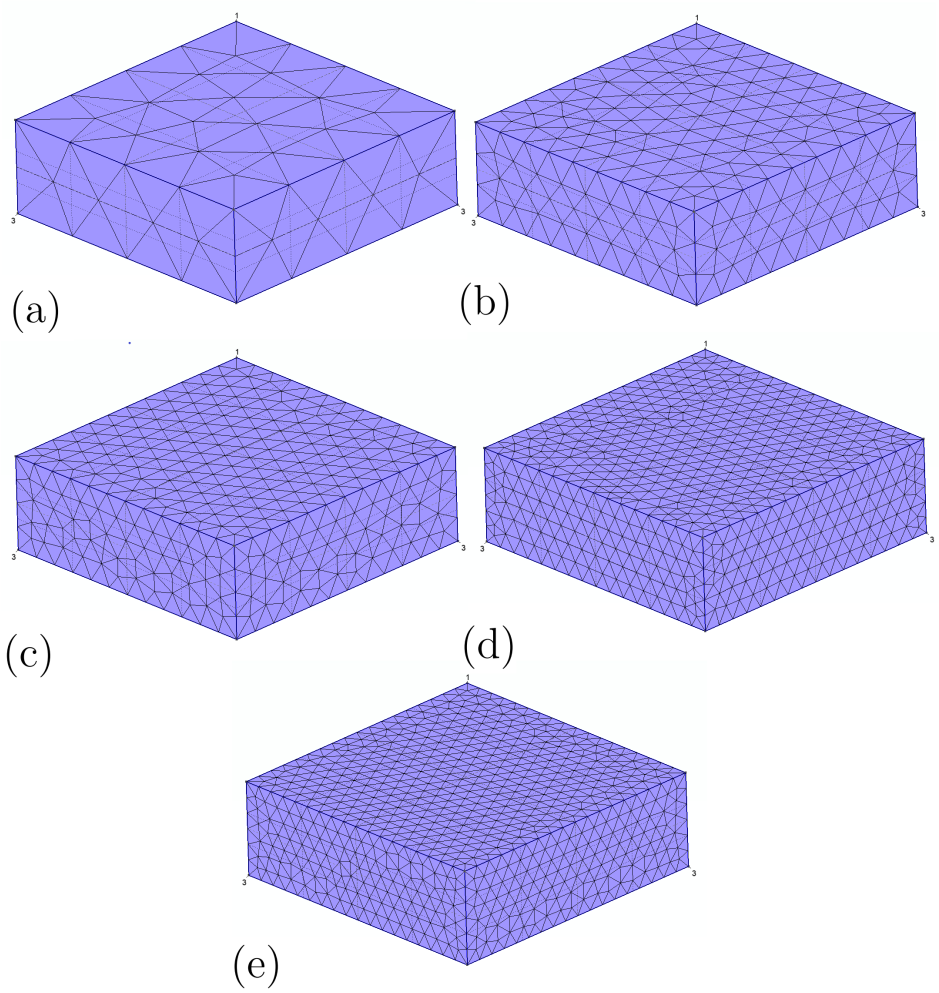
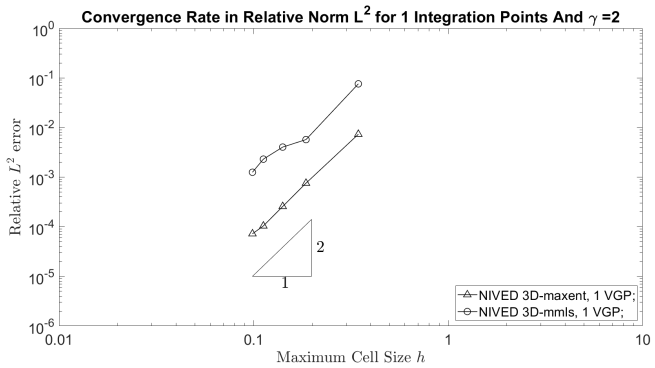
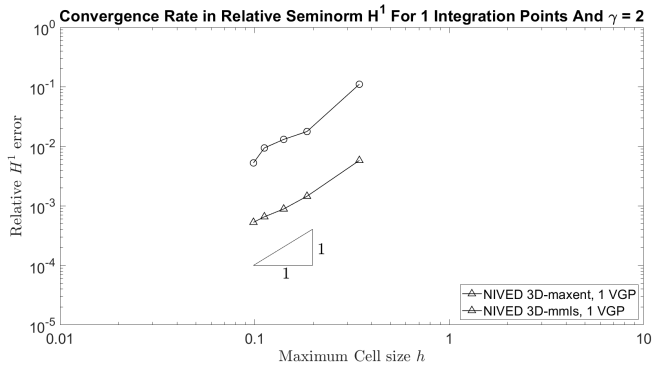


Figura 6.4: Secuencia de mallas no estructuradas utilizadas para el problema del Estrato Elástico Infinito. (a) Malla de 235 elementos y $h_{max} = 0.34$ in, (b) malla de 1415 elementos y $h_{max} = 0.18$ in, (c) malla de 3205 elementos y $h_{max} = 0.14$ in, (d) malla de 6362 elementos y $h_{max} = 0.11$ in, (e) malla de 9369 elementos y $h_{max} = 0.09$ in. Fuente: Elaboración Propia.



(a)



(b)

Figura 6.5: Tasas de convergencia para el problema del Estrato Elástico Infinito. El método NIVED usando las funciones maxent ofrece las tasas más óptimas de convergencia en la norma L^2 y la seminorma H^1. Fuente: Elaboración Propia.

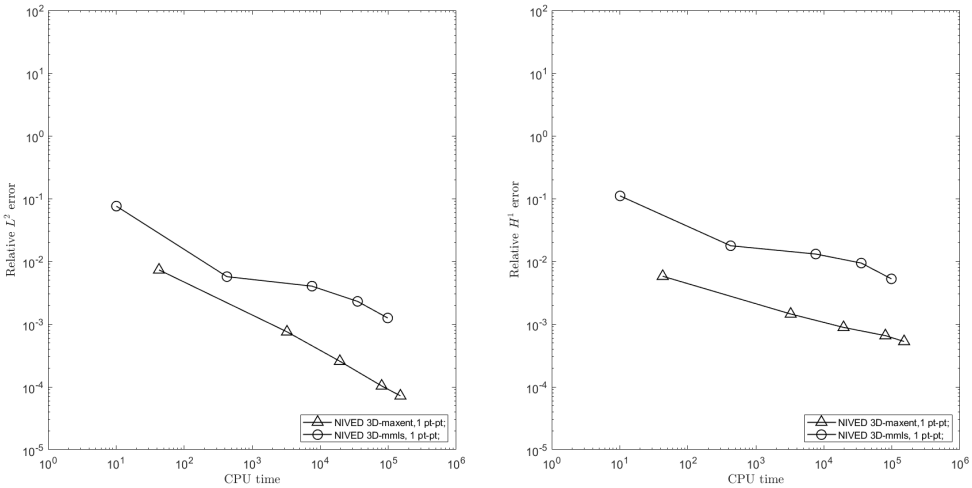


Figura 6.6: Costo computacional del esquema NIVED en el problema del Estrato Elástico Infinito. El costo computacional del enfoque NIVED usando las funciones mmls es notablemente menor que el caso NIVED usando las funciones maxent, pero por otra parte, la precisión del segundo método es muy superior. Fuente: Elaboración Propia.

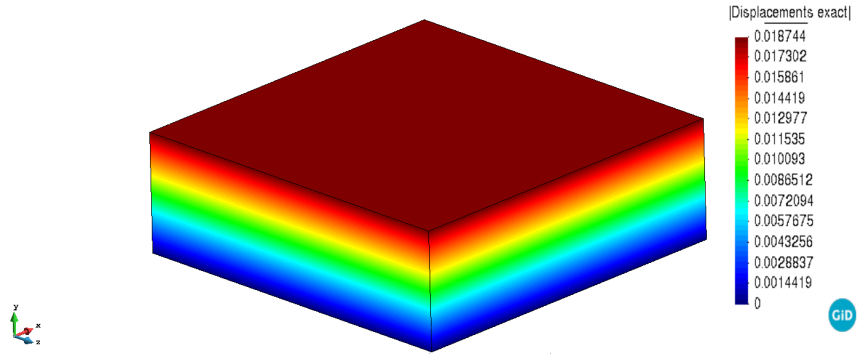


Figura 6.7: Solución exacta del desplazamiento para una malla de 9369 nodos y $h_{max} = 0.09$ para el problema del Estrato Elástico Infinito. Fuente: Elaboración Propia.

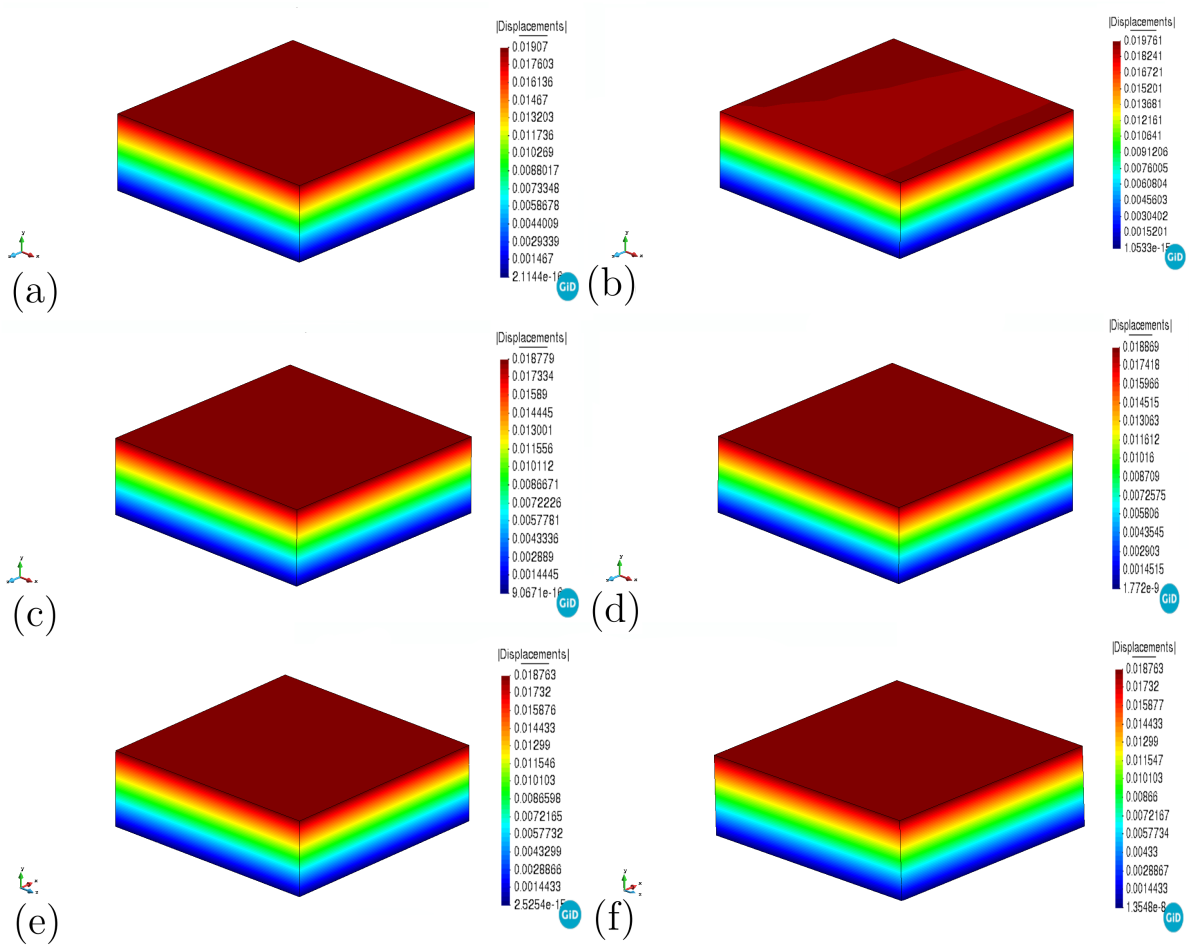


Figura 6.8: Solución numérica del desplazamiento para el problema del Estrato Elástico Infinito. Malla 6.4a (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.4d (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.4e (e) maxent (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia.

6.3. Estabilidad Numérica

Para evaluar la estabilidad del método NIVED, se realizan análisis de valores propios en elastostática lineal utilizando los datos del problema del estrato elástico infinito (consulte la Sección 6.2). Para el caso NIVED se considera la función de base radial de Gauss como la función de ponderación prior en la evaluación de las funciones de base de máxima entropía usando el parámetro de soporte de la función base $\gamma = 2.0$ y la función de base de mínimos cuadrados móviles modificados usando un parámetro de soporte de radio $\eta = 0.5$ y un valor cercano a cero para el prior cuadrático. Los análisis de valores propios tridimensionales entregan seis valores propios cero, que corresponden a los seis modos normales de cuerpo rígido o energía cero.

En la Figura 6.9 se muestran las 3 formas de modo suave, próximas a los seis modos de cuerpo rígido, que se obtienen en el enfoque MEM, MEM-VED y NIVED usando las funciones maxent y mmls. En el caso MEM (Figuras 6.9(a)-(f)), se observa que aunque las formas de los modos séptimos y octavo parecen suaves para ambos casos, el problema de estabilidad debido a los errores de integración en la rigidez integrada estándar de Gauss aparece en el noveno modo o llamadas formas de modo no suave (comportamiento de diente de sierra) o modos espurios. Para el método NIVED utilizando el prior gaussiano como la función de peso previa, se observa que no existen inestabilidades, como lo revelan las formas de modo suave que se muestran en las Figuras 6.9(j)-(l). En el enfoque MEM-VED (Figuras 6.9(g)-(i)) se exhibe el mismo comportamiento suave. Por otra parte para el método NIVED utilizando las funciones de mínimos cuadrados móviles modificados (Figuras 6.9(m-(ñ)), se observan formas de modo suave que se obtienen en los modos de vibración siete y ocho, ya en el modo nueve aparece un modo espurio. De esta forma se confirma la estabilidad del esquema NIVED tridimensional usando las funciones de máxima entropía al no presentar modos espurios.

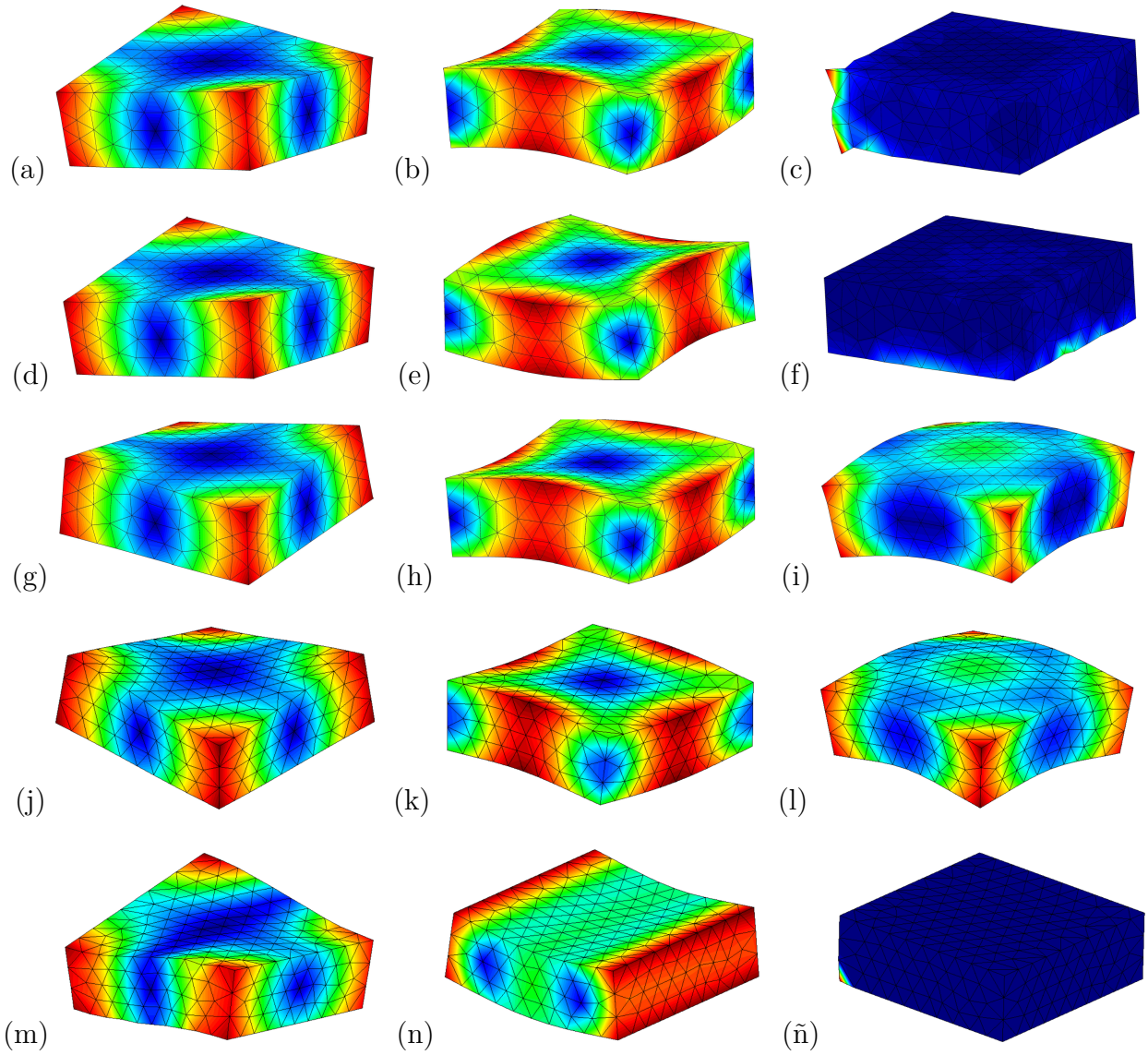


Figura 6.9: Análisis de valores propios en el caso tridimensional. Representación de las tres formas modales que siguen a los seis modos de cuerpo rígido. (a)-(c) MEM (1 punto), (d)-(f) MEM (24 puntos), (g)-(i) MEM-VED (1 pt-pt), (j)-(l) NIVED-maxent (1 pt-pt), (m)-(ñ) NIVED-mmls (1 pt-pt). Fuente: Elaboración Propia.

6.4. Cilindro Presurizado de Pared Gruesa

Se estudian las tasas de convergencia para el problema de un cilindro presurizado de paredes gruesas. La Figura 6.10 muestra la geometría y las condiciones de contorno para el caso en dos dimensiones en deformación plana (plane-strain) de un cuarto de cilindro dada la simetría de la geometría cilíndrica. Para el caso tridimensional, se agrega una dimensión que sale del plano y entrega un espesor de cilindro. La secuencia de mallas no estructuradas utilizadas en el estudio se muestran en la Figura 6.11. Se supone que el cilindro tiene largo unitario y se bloquean todos los desplazamientos en la dirección axial del contorno del cilindro

para que las condiciones de deformación plana sean válidas. La solución exacta para este problema se obtiene a partir de la solución analítica en la dirección radial y viene dada por [63]

$$\boldsymbol{u}_r = \frac{(1+\nu)r_i^2 r_o^2}{E(r_o^2 - r_i^2)} \left(\frac{(p_i - p_o)}{\boldsymbol{r}} + (1-2\nu)\frac{(p_i r_i^2 - p_o r_o^2)}{r_i^2 r_o^2}\boldsymbol{r} \right) \tag{6.2}$$

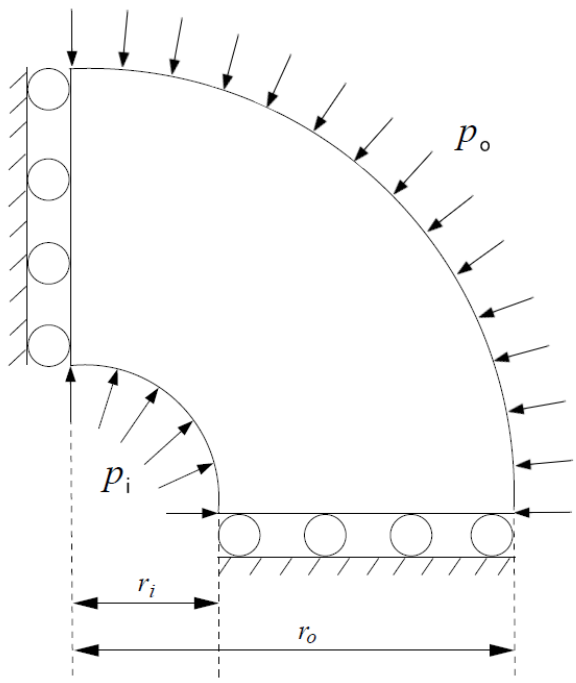


Figura 6.10: Geometría del modelo y condiciones de contorno para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. Fuente: [11]

donde $r_i \leq \boldsymbol{r} \leq r_o$ es el radio del cilindro de paredes gruesas con $r_i = 1$ in y $r_o = 2$ in; el módulo de Young se establece en $E = 10^7$ psi y el coeficiente de Poisson en $\nu = 0.3$. La presión interna se establece en $p_i = 10^5$ psi y la presión externa en $p_o = 5 \times 10^4$ psi.

El parámetro de soporte de la función base se establece en $\gamma = 2.0$ en la función de ponderación prior Gaussiana de las funciones maxent. Para el caso mmls se elige un valor cercano a cero para el prior cuadrático y un parámetro de soporte de radio $\eta = 0.5$. Comparamos las tasas de convergencia que entrega el método NIVED en tres dimensiones usando las funciones maxent y mmls. La Figura 6.12 presenta las tasas de convergencia para los enfoques NIVED. Se observa que las tasas de convergencia son óptimas en el método NIVED usando maxent y mmls tanto en la norma L^2 como en la seminorma H^1, ya que sus valores se acercan a los óptimos (ver capítulo 6.2.4 de [61]). En [61], se observa que para el enfoque MEM, la convergencia en la seminorma H^1 es errática para las reglas de Gauss de 1 y 3 puntos, y se necesita una regla de 6 puntos para recuperar la tasa de convergencia óptima. Se observa una tendencia similar para la norma L^2. El enfoque MEM con reglas de 1 y 3 puntos es menos preciso que el esquema NIVED en tres dimensiones usando maxent y mmls.

Finalmente, a modo comparativo en La Figura 6.13 se muestra la solución exacta del desplazamiento y el esfuerzo de von Mises. En la Figura 6.14, se presentan las soluciones numéricas del desplazamiento para el enfoque NIVED tridimensional usando las funciones maxent y mmls. Podemos observar que para una malla de 1533 nodos la solución converge bien usando las funciones mmls, en cambio, en el caso de las funciones maxent, aún la solución gráfica no converge en su totalidad, observándose unas manchas en los bordes donde se aplica la condición de Neumann, esto se ve reflejado en que la tasa de convergencia que para este problema en particular es mayor y más cercana a 2 en el caso de las funciones mmls. A todo esto se debe sumar que para el caso de la solución usando maxent, es necesario usar un $gap = 0.995$ en el contorno del radio exterior tanto para los nodos, como para los vértices y puntos de Gauss, esto, para que las funciones maxent pasen los test de chequeo necesarios. Específicamente el problema de optimización de las funciones maxent involucra la necesidad de que la coordenada calculada se encuentre dentro del dominio convexo.

Por otra parte en la Figura 6.15 se presenta las soluciones numéricas del esfuerzo de von Mises para el enfoque NIVED tridimensional usando las funciones maxent y mmls. Notamos que a medida que la malla se va refinando, en ambos casos, el esfuerzo de von Mises es más suave y parecida a la solución exacta. En consecuencia a todo lo antes mencionado, se concluye la convergencia del método NIVED en el caso tridimensional usando las funciones maxent y mmls.

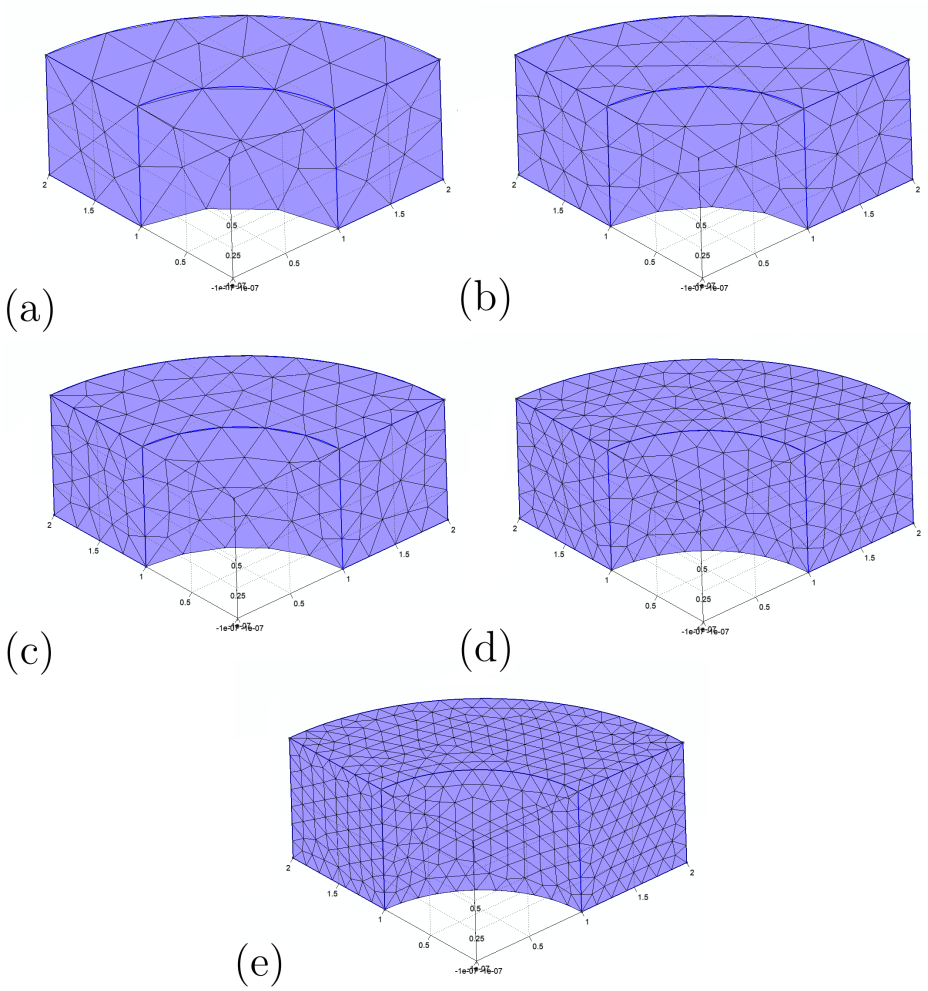


Figura 6.11: Secuencia de mallas utilizadas para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. (a) Malla no estructurada de 141 elementos y $h_{max} = 0.26$ in, (b) malla no estructurada de 298 elementos y $h_{max} = 0.20$ in, (c) malla no estructurada de 593 elementos y $h_{max} = 0.16$ in, (d) malla no estructurada de 1533 elementos y $h_{max} = 0.12$ in, (e) malla no estructurada de 3265 elementos y $h_{max} = 0.09$ in. Fuente: Elaboración Propia.

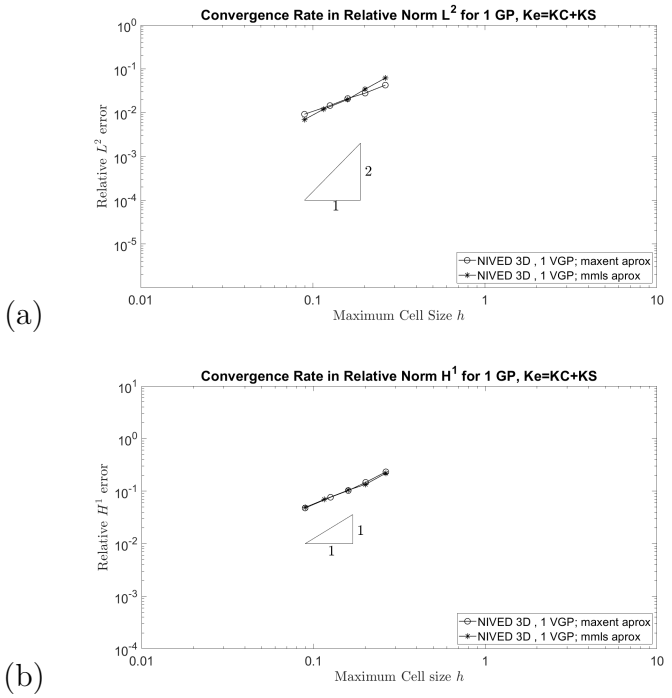


Figura 6.12: Tasas de convergencia para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. El método NIVED usando las funciones maxent ofrece las tasas más óptimas de convergencia en la norma L^2 y la seminorma H^1. Fuente: Elaboración Propia.

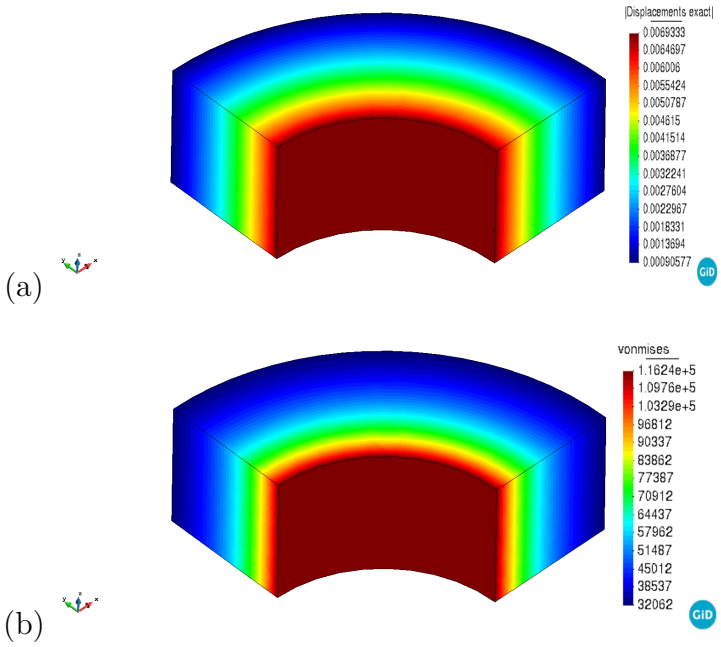


Figura 6.13: Solución exacta del desplazamiento y el esfuerzo de von Mises para una malla de 3265 nodos y $h_{max} = 0.09$ in para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. Fuente: Elaboración Propia.

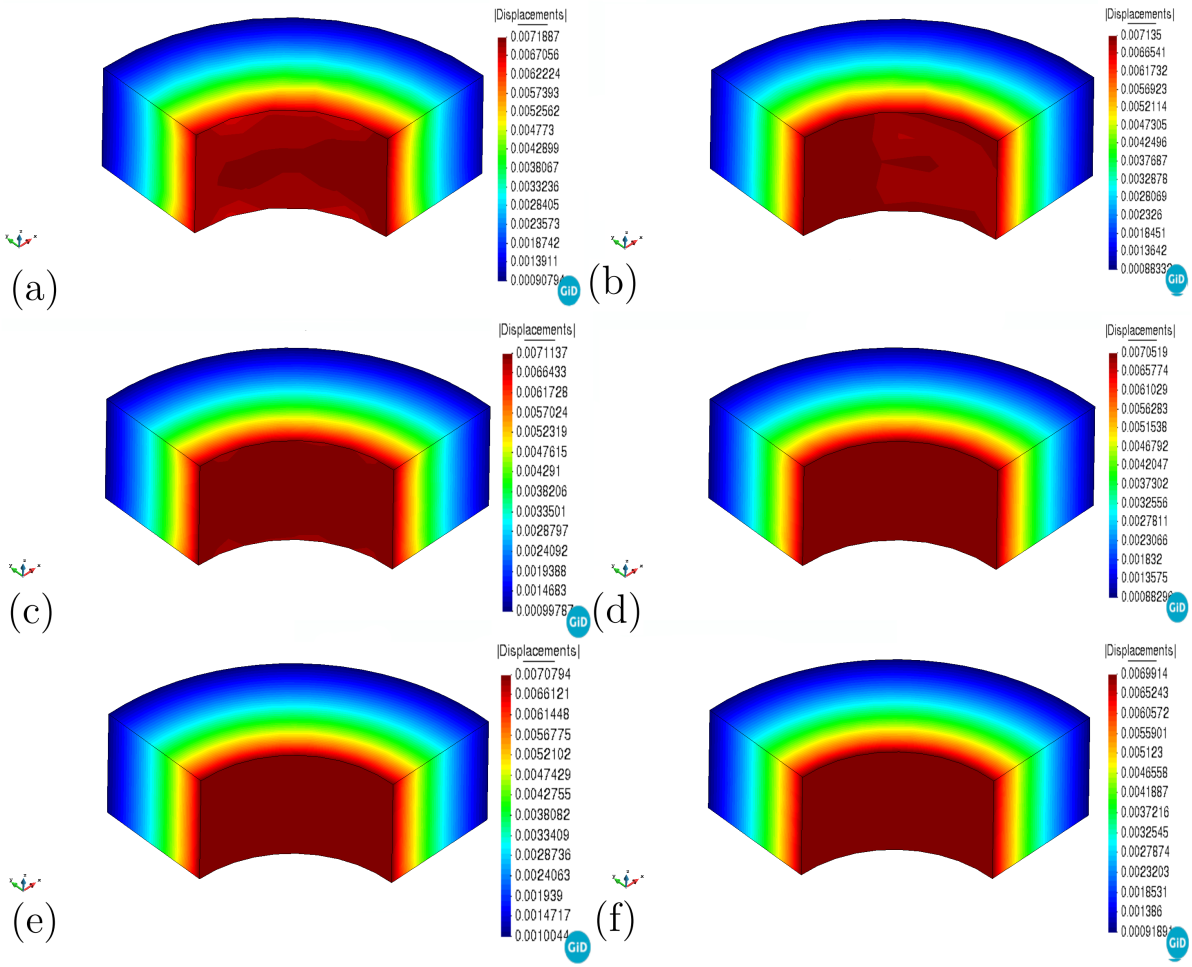


Figura 6.14: Solución numérica del desplazamiento para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. Malla 6.11c (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.11d (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.11e (e) maxent, (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia.

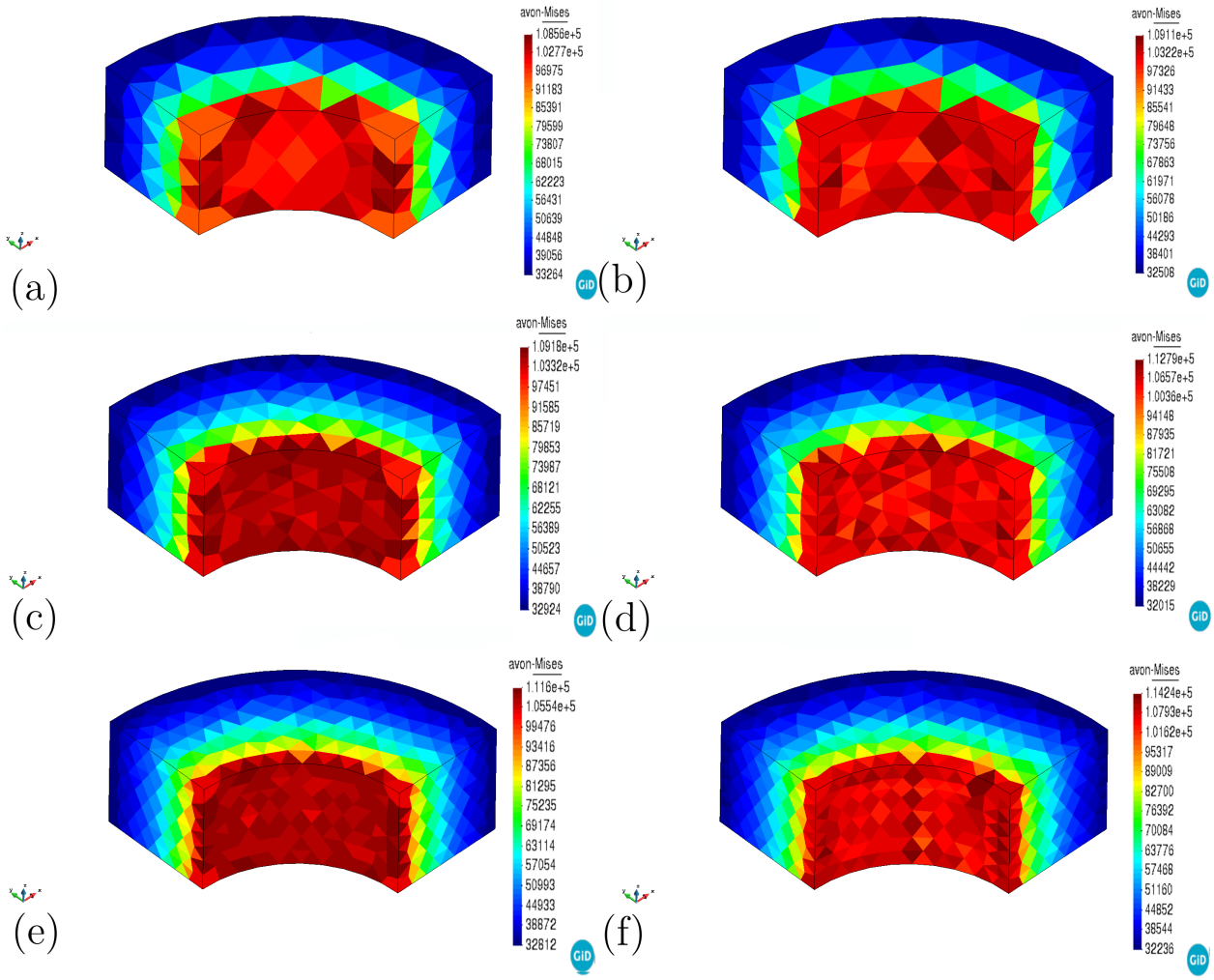


Figura 6.15: Solución numérica del esfuerzo de von Mises para el problema del Cilindro Presurizado de Pared Gruesa. Malla 6.11c (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.11e (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.11b (e) maxent, (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia.

6.5. Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna

Se estudian las tasas de convergencia para el problema de una esfera hueca sujeta a presión interna. La Figura 6.16 muestra un octavo del modelo de una esfera, debido a la simetría de la geometría esférica. La secuencia de mallas no estructuradas utilizadas en el estudio se muestran en la Figura 6.17. La solución exacta para este problema se obtiene a partir de la solución analítica en la dirección radial y viene dada por [60]

$$\boldsymbol{u}_r = \frac{(1+\nu)\boldsymbol{r}}{E}\left[\frac{\frac{r_o^3}{2\boldsymbol{r}^3}+\frac{1-2\nu}{1+\nu}}{\frac{r_o^3}{r_i^3}-1}p_i\right] \tag{6.3}$$

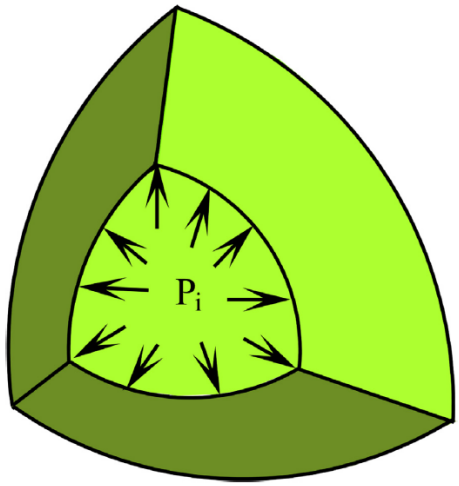


Figura 6.16: Geometría del modelo para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. Fuente: [64]

donde $r_i \leq \boldsymbol{r} \leq r_o$ es el radio del esfera hueca sujeta a presión interna con $r_i = 1$ in y $r_o = 2$ in; el módulo de Young se establece en $E = 10^7$ psi y la relación de Poisson en $\nu = 0.3$. La presión interna se establece en $p_i = 5 \times 10^5$ psi.

El parámetro de soporte de la función base se establece en $\gamma = 2.0$ en la función de ponderación prior gaussiana de las funciones maxent. Para el caso mmls se elige un valor cercano a cero para el prior cuadrático y un parámetro de soporte de radio $\eta = 0.5$. Comparamos las tasas de convergencia que entrega el método NIVED en tres dimensiones usando las funciones maxent y mmls. La Figura 6.18 presenta las tasas de convergencia para los enfoques NIVED. Se observa que las tasas de convergencia son óptimas en el método NIVED usando maxent tanto en la norma L^2 como en la seminorma H^1, ya que sus valores se acercan a los óptimos (ver capítulo 6.2.4 de [61]), por otra parte en el caso mmls, la convergencia claramente no es óptima.

Finalmente, a modo comparativo en La Figura 6.19 se muestra la solución exacta del desplazamiento y el esfuerzo de von Mises para una malla fina. En la Figura 6.20, se presenta las soluciones numéricas del desplazamiento para el enfoque NIVED tridimensional usando las funciones maxent y mmls. Podemos observar que para una malla de 3044 nodos la solución converge bien usando las funciones maxent, en cambio, en el caso de las funciones mmls, la solución no converge en ninguno de los casos, observándose una solución asimétrica del desplazamiento, esto se ve reflejado en la tasa de convergencia de la norma L^2, en la cual para el caso mmls es cercana a 1. Por otra parte en la Figura 6.21 se presenta las soluciones numéricas del esfuerzo de von Mises para el enfoque NIVED tridimensional usando las funciones maxent y mmls. Notamos que a medida que la malla se va refinando, en el caso de la aproximación maxent, el esfuerzo de von Mises es más suave y similar a la solución analítica. Para la aproximación mmls la soución no converge, esto se ve reflejado en la tasa de convergencia de la semi norma H^1, en la cual para el caso mmls es cercana a 0.5. Estos errores de integración, relacionan la complejidad del problema en tanto al sometimiento de las condiciones de borde, que para el caso de las funciones maxent, gracias a la propiedad de delta Kronecker, nos permite fijar el valor del desplazamiento en los bordes, sin la interferencia de los nodos interiores en la integración numérica. En consecuencia a todo lo antes

mencionado, se concluye la convergencia del método NIVED en el caso tridimnesional usando las funciones de máxima entropía.

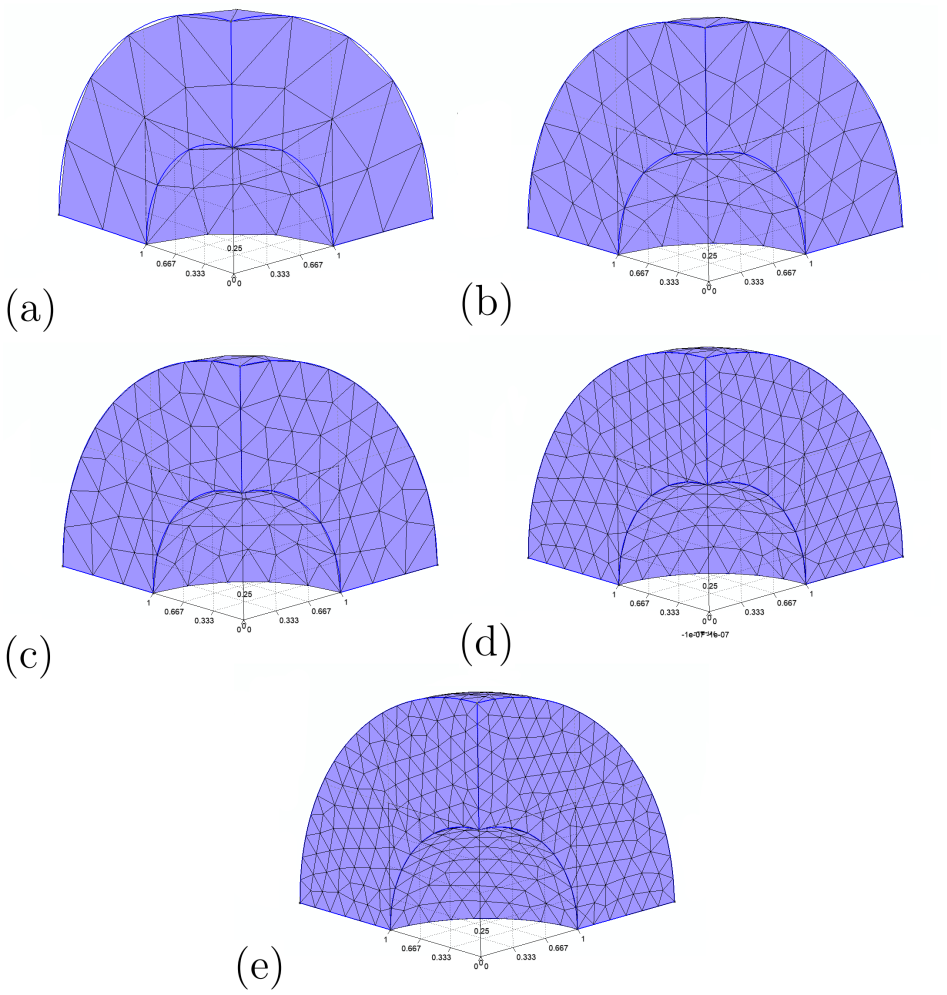
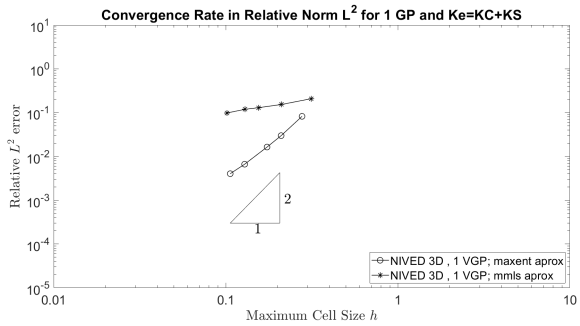


Figura 6.17: Secuencia de mallas utilizadas para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. (a) Malla no estructurada de 128 elementos y $h_{max} = 0.28$ in, (b) malla no estructurada de 405 elementos y $h_{max} = 0.21$ in, (c) malla no estructurada de 695 elementos y $h_{max} = 0.17$ in, (d) malla no estructurada de 1702 elementos y $h_{max} = 0.13$ in, (e) malla no estructurada de 3044 elementos y $h_{max} = 0.1$ in. Fuente: Elaboración Propia.

(a)



(b)

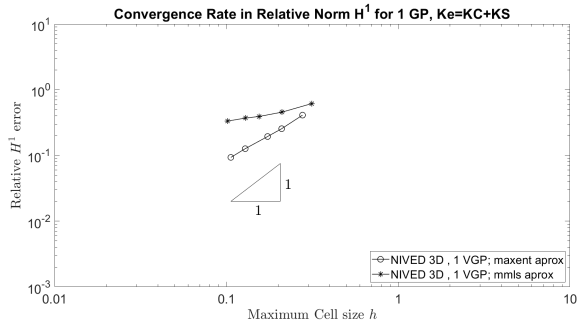
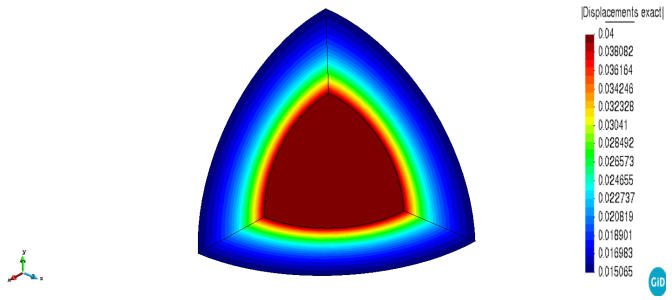


Figura 6.18: Tasas de convergencia para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. El método NIVED usando las funciones maxent ofrece las tasas más óptimas de convergencia en la norma L^2 y la seminorma H^1. Fuente: Elaboración Propia.

(a)



(b)

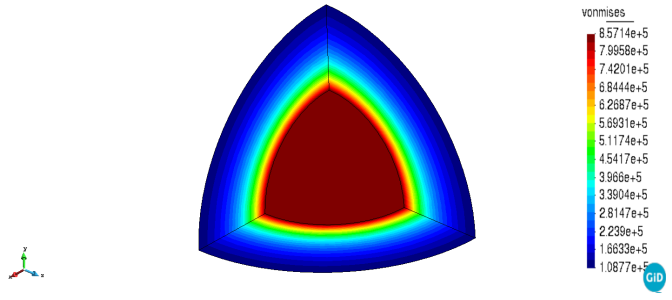


Figura 6.19: Solución exacta del desplazamiento y el esfuerzo de Von Mises para una malla de 9369 nodos y $h_{max} = 0.09$ para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. Fuente: Elaboración Propia.

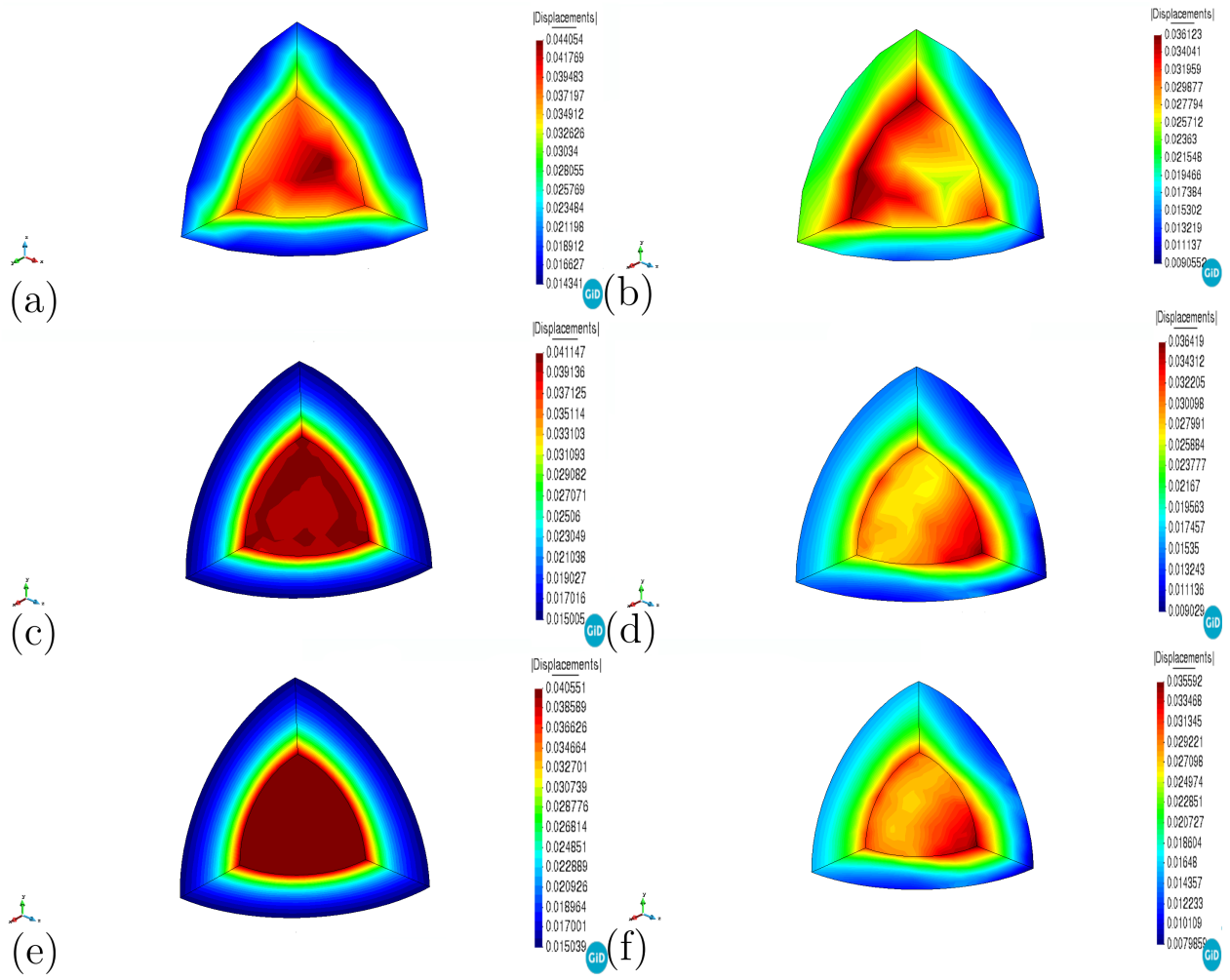


Figura 6.20: Solución numérica del desplazamiento para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. Malla 6.17c (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.17d (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.17e (e) maxent, (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia.

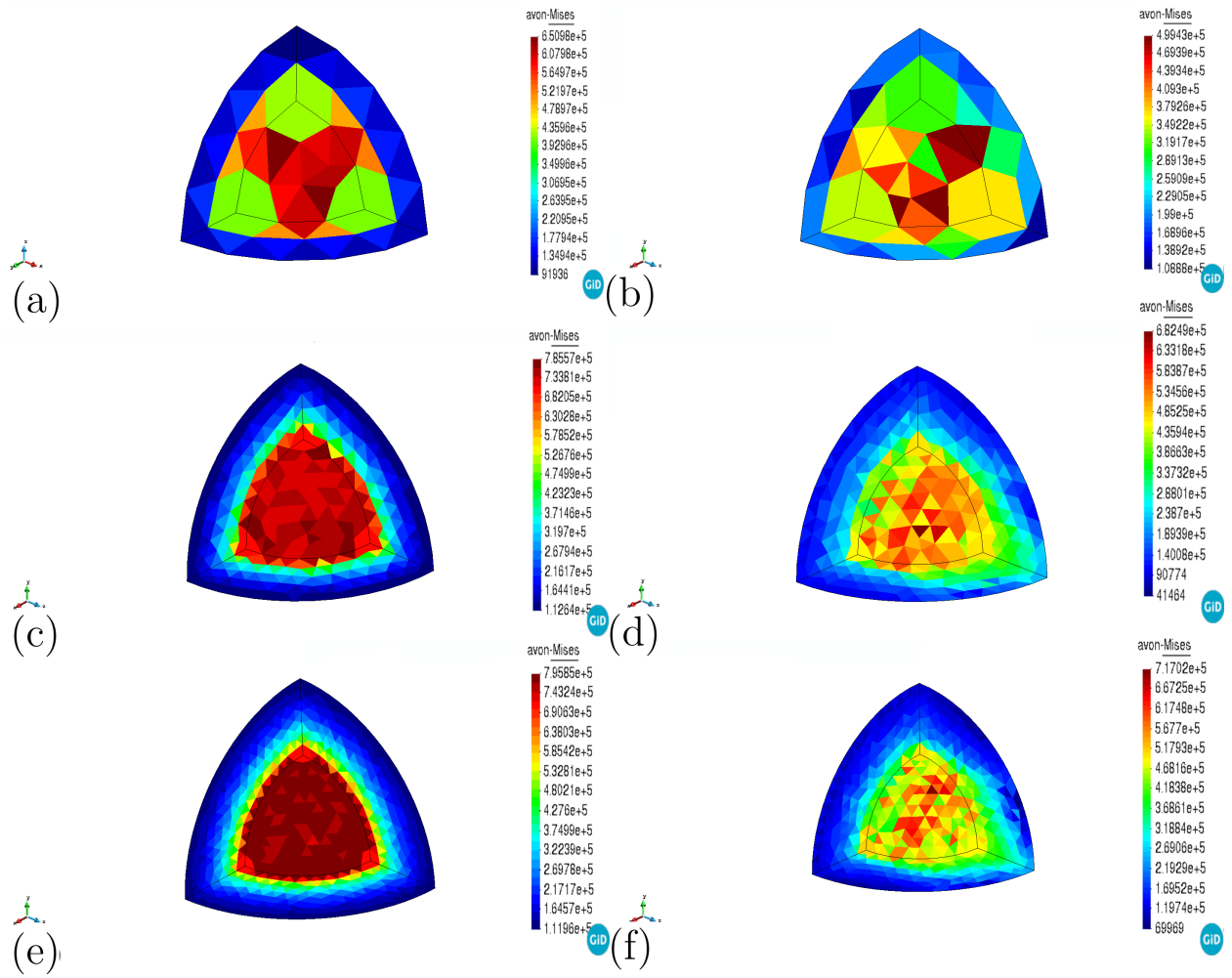


Figura 6.21: Solución numérica del esfuerzo de von Mises para el problema de la Esfera Hueca Sujeta a Presión Interna. Malla 6.17c (a) maxent, (b) mmls. Malla 6.17d (c) maxent, (d) mmls. Malla 6.17e (e) maxent, (f) mmls. Fuente: Elaboración Propia.

6.6. Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna

Concluimos esta sección con una demostración de la formulación NIVED no lineal en tres dimensiones usando mallas tetraédricas para el análisis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones. El problema de prueba consiste en un cilindro de paredes gruesas sometido a presión interna cuya constitución del material es un sólido isotrópico lineal descrito por el modelo viscoelástico generalizado de Maxwell considerado en la Sección 5. Este ejemplo se ha utilizado para evaluar el método del elemento virtual para el análisis inelástico en la referencia [65]. Por simetría, solo se considera un cuarto de la sección transversal del cilindro, como se muestra en la Figura 6.22, donde $r_i = 2$ pulgadas, $r_o = 4$ pulgadas y $p = 10$ psi. Los parámetros del material se establecen en $E = 1000$ psi, $\nu = 0.3$ y $\lambda_1 = 1$. La presión se aplica

repentinamente y la respuesta estructural se calcula mediante pasos de 20 unidades de tiempo. En la primera parte de este estudio, se evalúa la convergencia del desplazamiento radial en los puntos de control A y B (Figura 6.22). Para propósitos de comparación, se utiliza la solución numérica obtenida con una malla muy refinada de elementos cuadriláteros FEM de 9 nodos (FEM-Q9) y una malla muy refinada de polígonos NIVED en dos dimensiones, todo esto en el marco del problema del cilindro viscoelástico en dos dimensiones para un estado de deformaciones planas [11]. Se consideran tres conjuntos de opciones para los parámetros de material μ_0 y μ_1 : $(\mu_0, \mu_1) = \{(0.7, 0.3), (0.3, 0.7), (0.01, 0.99)\}$. Usando E y ν para calcular el módulo volumétrico K del material y (5.3) para calcular $G(t = 20)$, la relación de Poisson efectiva se calcula como $\nu_{eff} = \frac{3K2G(20)}{2(3K+G(20))}$. Para los tres conjuntos de parámetros anteriores, esto da en el tiempo $t = 20$ los valores $\nu_{eff} = \{0.3542, 0.4338, 0.4977\}$, respectivamente. Por lo tanto, para el último conjunto, el material es casi incompresible.

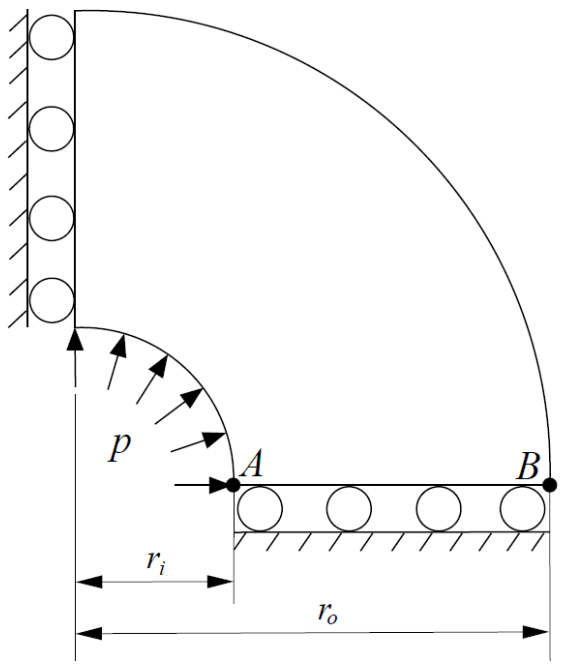


Figura 6.22: Dominio y condiciones de contorno para el Cilindro Viscoelástico de Pared Gruesa Sometido a Presión Interna. Fuente: [11]

La convergencia del desplazamiento radial NIVED en los puntos de control A y B se resume en la Tabla 6.3 para la secuencia de mallas de integración tetraédricas representada en la Figura 6.23. Se observa una buena concordancia con la solución de referencia FEM-Q9 y NIVED en dos dimensiones para los tres conjuntos de parámetros de material, pero en particular, la solución con las funciones maxent parece ser siempre más precisa. Las curvas que representan la historia temporal del desplazamiento radial medido en los puntos de control A y B se muestran en la Figura 6.24 para los tres conjuntos de parámetros del material. Las curvas de respuesta para el esquema NIVED en tres dimensiones se trazan para la malla que se muestra en la Figura 6.23b. Se destaca una mayor precisión en todos los pasos de tiempo del método NIVED tridimensional usando las funciones maxent con respecto a las soluciones de referencia.

Tabla 6.3: Desplazamientos radiales NIVED en tres dimensiones en los puntos A y B para el problema del Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas en el Tiempo $t = 20$.

$(\mu_0, \mu_1) = (0.7, 0.3)$				$(0.3, 0.7)$		$(0.01, 0.99)$	
mesh	#dofs	u_A	u_b	u_A	u_b	u_A	u_b
Figura 6.23a (mmls)	1221	0.053150	0.032122	0.118513	0.064699	0.609208	0.309068
Figura 6.23b (mmls)	2124	0.054144	0.032371	0.118910	0.065736	0.619579	0.313656
Figura 6.23a (maxent)	1221	0.053135	0.032021	0.118451	0.064249	0.635201	0.319317
Figura 6.23b (maxent)	2124	0.053608	0.032175	0.119992	0.065400	0.646742	0.327167
Ref. 1 (FEM-Q9)	79242	0.053584	0.032425	0.119970	0.066177	0.652880	0.334810
Ref. 2 (NIVED-2D)	26082	0.053131	0.031983	0.119070	0.065272	0.648440	0.330210

Por último, se estudia el comportamiento del método NIVED para el comportamiento de materiales casi incompresibles. El enfoque NIVED tridimensional se prueba en la malla no estructurada que se muestra en la Figura 6.23b y su solución de campo de esfuerzo radial se compara con la solución FEM-Q9 y NIVED en dos dimensiones. También en esta malla, el campo de esfuerzo radial se calcula con elementos cuadriláteros FEM de 4 nodos (FEM-Q4). Las comparaciones se resumen en la Figura 6.25 . El campo de esfuerzo radial correspondiente al caso compresible $(\mu_0, \mu_1) = (0.7, 0.3)$ $(\nu_{eff} = 0.3542)$ se muestra en las Figuras 6.25(a)–(e) para FEM-Q4, FEM-Q9 y NIVED en sus tres formas, respectivamente. Se observa que los cinco métodos funcionan bien en este caso. Por supuesto, debido a su mayor orden de aproximación, el campo de esfuerzo radial FEM-Q9 es más suave que los campos de tensión radial FEM-Q4 y NIVED en los tres casos. En los métodos NIVED tridimensional ya fue demostrado que habrá mayor suavidad de la solución a medida que se refina la malla, de todas formas las funciones maxent siguen siendo la mejor opción. El campo de esfuerzo radial correspondiente al caso casi incompresible $(\mu_0, \mu_1) = (0.01, 0.99)$ $(\nu_{eff} = 0,4977)$ se representa en las Figuras 6.25(f)–(j) para los métodos FEM-Q4, FEM-Q9 y NIVED en sus tres formas, respectivamente. En este caso, el campo de esfuerzo radial del FEM-Q9 parece suave y no se observa ningún signo de bloqueo. Sin embargo, el comportamiento de bloqueo se exhibe en el caso de FEM-Q4 como lo demuestra el campo de esfuerzo radial oscilatorio. El esquema NIVED funciona mejor que el FEM-Q4 en el límite incompresible, pero se producen algunas pequeñas oscilaciones en el campo de esfuerzo radial y, por lo tanto, no está completamente libre de bloqueo en ningún caso NIVED. Esto no es sorprendente, ya que el uso del marco de elementos virtuales en el enfoque NIVED garantiza la consistencia (satisfacción del Test de la Parcela) y la estabilidad para una formulación basada en el desplazamiento. Para hacer que el esquema NIVED esté libre de bloqueos en el límite casi incompresible, sería necesario introducir, por ejemplo, una forma de técnica de promedio nodal. Además, es importante destacar el bajo costo computacional de las funciones mmls en el proceso viscoelástico, la rapidez en el cálculo de las funciones de base debido a la baja complejidad del problema de cuadrados móviles y la eficacia que produce esto en el ensamble de la matriz de rigidez, sumándole a esto, el aumento del costo computacional general que generan los pasos de tiempo en las iteraciones de Newton Raphson, las funciones mmls, proporcionan un método que permite generar estudios con mucha velocidad y con una precisión admirable.

Finalmente, comparamos los desplazamientos en el paso de tiempo número 20 entre los

métodos NIVED tridimensional usando las funciones mmls y maxent. Notamos en la Figura 6.26, que para ambos casos la solución aún no converge correctamente, esto no es problema ya que se demostró en 6.4 que para una malla de 3265 nodos la solución ya converge de manera suave, sin embargo la solución siempre es más suave y optimamente más parecida a las soluciones de referencia de la Tabla 6.3 en el caso de las funciones de máxima entropía.

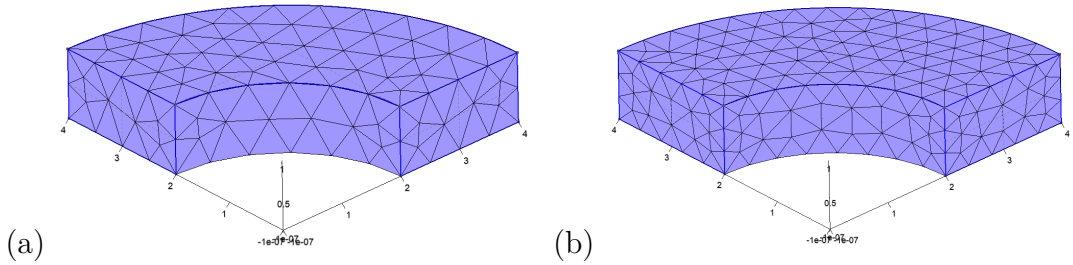
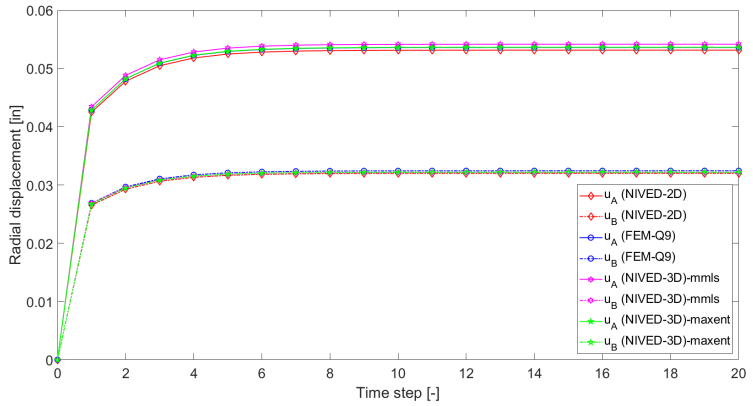
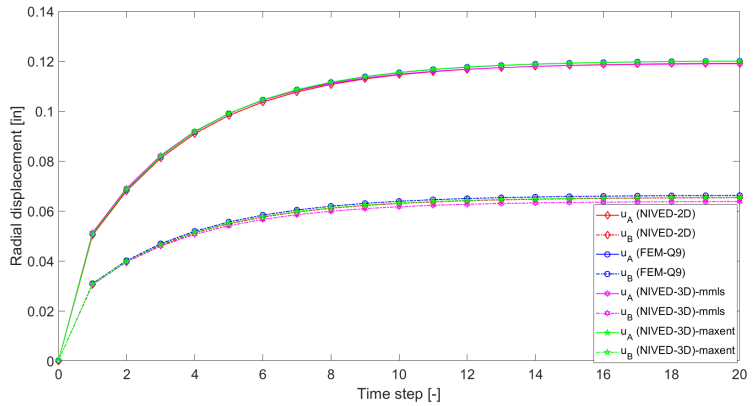


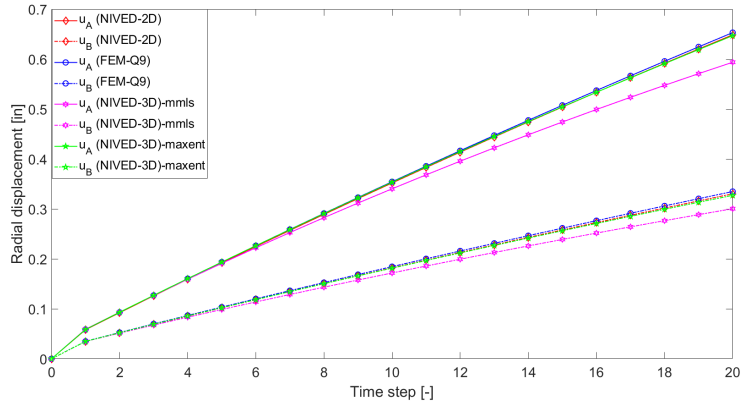
Figura 6.23: Secuencia de mallas utilizadas para el problema del Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna. (a) Malla no estructurada de 1221 grados de libertad y $h_{max} = 0.29$ in, (b) malla no estructurada de 2124 grados de libertad y $h_{max} = 0.19$ in. Fuente: Elaboración Propia.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.24: Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna. Historia temporal del desplazamiento radial medido en los puntos de control A (curvas superiores) y B (curvas inferiores) para tres conjuntos de parámetros viscoelásticos: (a) $(\mu_0, \mu_1) = (0.7, 0.3)$, (b) $(\mu_0, \mu_1) = (0.3, 0.7)$ y (c) $(\mu_0, \mu_1) = (0.01, 0.99)$. Fuente: Elaboración Propia.

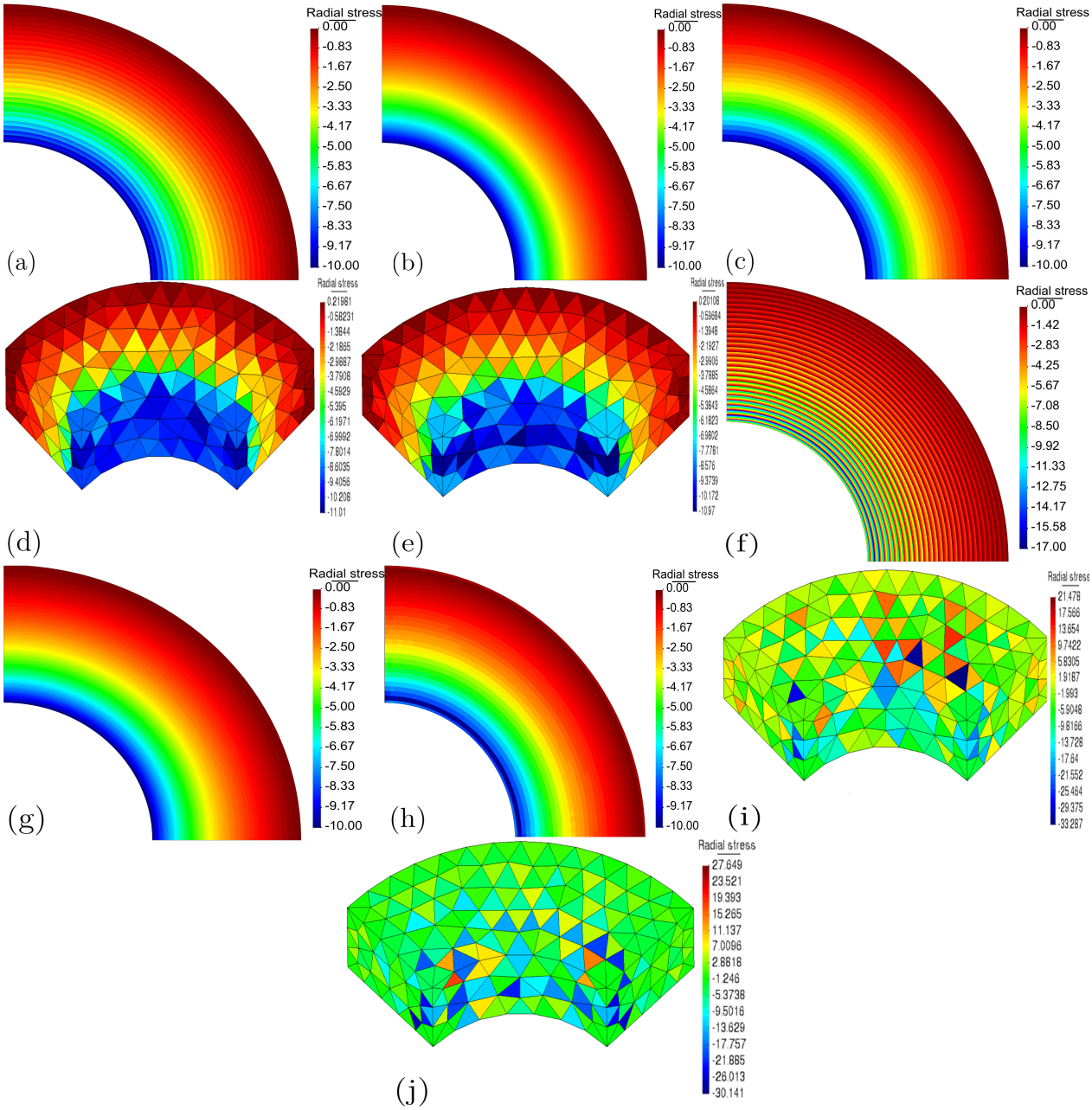


Figura 6.25: Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna. Comparación de gráficos del esfuerzo radial utilizando esquemas FEM en dos dimensiones y NIVED en dos y tres dimensiones. Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.7, 0.3)$: (a) FEM Q4, (b) FEM-Q9, (c) NIVED 2D, d) NIVED 3D (mmls) y e) NIVED 3D (maxent). Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.01, 0.99)$: (f) FEM Q4, (g) FEM-Q9, (h) NIVED 2D, (i) NIVED 3D (mmls) y (j) NIVED 3D (maxent). Fuente: Elaboración Propia.

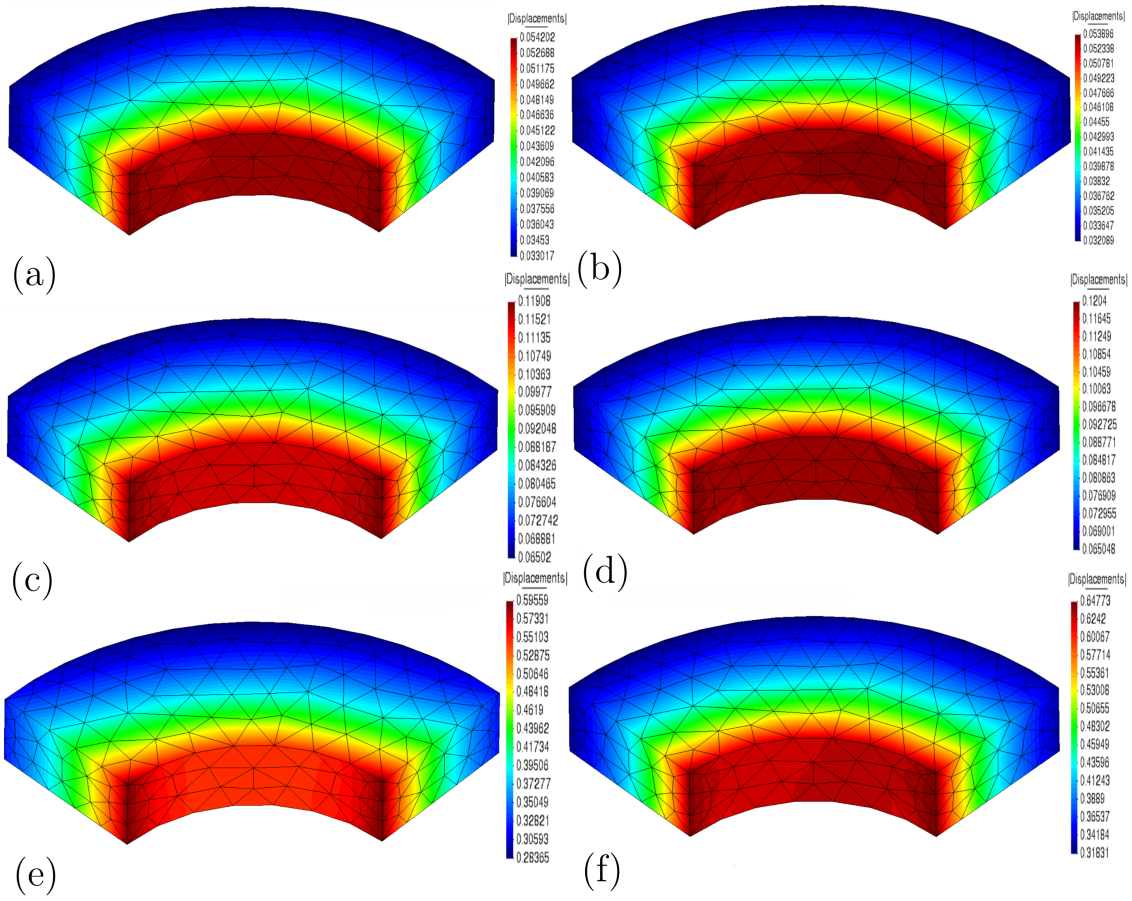


Figura 6.26: Cilindro Viscoelástico de Paredes Gruesas Sometido a Presión Interna. Comparación de gráficos del desplazamiento para el método NIVED en tres dimensiones usando las funciones mmls y maxent. Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.7, 0.3)$: (a) NIVED 3D-mmls, (b) NIVED 3D-maxent. Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.3, 0.7)$: (c) NIVED 3D-mmls, (d) NIVED 3D-maxent. Para parámetros viscoelásticos $(\mu_0, \mu_1) = (0.01, 0.99)$: (e) NIVED 3D-mmls, (f) NIVED 3D-maxent. Fuente: Elaboración Propia.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis, se propuso una extensión tridimensional de un esquema de integración nodal novedoso para los métodos de Galerkin sin malla, que está diseñado a partir de la descomposición de elementos virtuales [9], donde la forma bilineal se descompone en una parte de consistencia y una parte de estabilidad que aseguran que el método sea consistente y estable, y que en base al teorema de Lax, se garantiza la convergencia. Se adoptaron funciones lineales de base sin malla de máxima entropía y mínimos cuadrados móviles modificados, pero la formulación es aplicable a cualquier otra aproximación lineal sin malla. Nos referimos a este novedoso esquema de integración nodal como NIVED en el caso tridimensional. Como en cualquier método de integración nodal, se necesita una celda nodal representativa. La celda nodal se puede construir a partir de bases tetraédricas, formando, ya sea poliedros de caras triangulares al unir los tetraedros o simplemente las celdas quedan como tetraedros, según sea la necesidad de optimizar la información.

Se llevaron a cabo pruebas numéricas en problemas de valor de contorno en elastostática lineal, donde el enfoque se centró en comparar el rendimiento del método NIVED tridimensional con otros métodos libres de malla, utilizando la integración estándar de Gauss. También proporcionamos la extensión del enfoque NIVED tridimensional al análisis no lineal donde la constitución del material es un sólido isotrópico lineal descrito por el modelo viscoelástico generalizado de Maxwell. Se realizaron comparaciones con soluciones de referencia obtenidas con elementos cuadriláteros FEM de 4 nodos, 9 nodos y el método NIVED en dos dimensiones para celdas poliédricas. En el enfoque NIVED en tres dimensiones, las integrales de forma débil se integran muestreándolas en los nodos y la integración en un nodo se realiza utilizando una regla de Gauss de 1 punto sobre los bordes de su celda nodal representativa. Esta tarea solo implica la evaluación de funciones base (no se necesitan derivadas). En otros métodos libres de malla, la integración de las integrales de forma débil se realiza utilizando la integración estándar de Gauss en el interior de celdas triangulares, lo que requiere la evaluación de las derivadas de las funciones de base, por lo tanto más costo computacional.

Nuestros principales hallazgos en este trabajo son los siguientes. El esquema NIVED en tres dimensiones pasa el Test de la Parcela usando las funciones de máxima entropía a la precisión de la máquina, mientras que al usar las funciones de mínimos cuadrados móviles modificados no alcanza este nivel de precisión debido a errores asociados a la imposición de las condiciones de borde. La prueba de estabilidad numérica mostró que tanto el método NIVED en tres dimensiones como el MEM y el MEM-VED ofrecen los seis modos de cuerpo

rígido de energía cero, pero solo el método MEM y NIVED tridimensional usando las funciones mmls exhiben inestabilidades, como lo demuestra la presencia de los modos propios no suaves o llamados modos espurios en el modo de vibrar número 9. La convergencia se evaluó a través de varios experimentos numéricos, que incluyeron un cilindro de paredes gruesas sometido a presiones, una esfera hueca sujeta a presión interna y un estrato elástico infinito. Los estudios de convergencia revelaron que el método NIVED en tres dimensiones usando las funciones de máxima entropía ofrece la tasa óptima de convergencia en la norma L^2 y la seminorma H^1. En términos de costo computacional, se demostró que para el mismo número de grados de libertad, el esquema NIVED tridimensional usando mmls es más eficiente pero menos preciso que un enfoque NIVED tridimensional usando las funciones de base maxent. El rendimiento de la formulación no lineal de NIVED en tres dimensiones se evaluó resolviendo el problema de un cilindro viscoelástico de paredes gruesas sometido a presión interna. Se encontró que la solución de desplazamiento radial se asemeja con una solución de referencia obtenida utilizando elementos finitos cuadriláteros cuadráticos (9 nodos) y la solución de referencia NIVED en dos dimensiones (1 nodo por cara). También se demostró que para un material viscoelástico casi incompresible, el esquema NIVED en tres dimensiones no está completamente desprovisto de bloqueo.

Para terminar, mencionamos que una característica deseable que puede ofrecer el enfoque NIVED tridimensional (integrado nodalmente) es que las variables de estado, como las deformaciones, los esfuerzos y otras variables internas en los cálculos no lineales, pueden almacenarse en los nodos, lo cual es atractivo para simulaciones sin malla Lagrangiana en grandes deformaciones. Esta extensión del método NIVED en tres dimensiones a grandes deformaciones es atractiva y está planificada como parte del trabajo futuro.

En trabajos posteriores, es posible estudiar los procedimientos asociados con la no linealidad del material independiente de la velocidad (plasticidad), la no linealidad del material dependiente de la velocidad (fluencia y viscoplasticidad), algunos problemas de campos no lineales, grandes desplazamientos y otros ejemplos especiales.

Bibliografía

[1] J. Dolbow and T. Belytschko, "Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods," *Computational Mechanics*, vol. 23, no. 3, pp. 219–230, 1999.

[2] T. Belytschko, Y. Lu, , and L. Gu, "Element-free Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 229–256, 1994.

[3] B. Li, F. Habbal, and M. Ortiz., "Optimal transportation meshfree approximation schemes for fluid and plastic flows," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, no. 12, pp. 1541–1579, 2010.

[4] D. Sulsky, Z. Chen, and H. L. Schreyer., "A particle method for history-dependent materials," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 118, no. 1, pp. 179–196, 1994.

[5] S. Beissel and T. Belytschko, "Nodal integration of the element-free Galerkin method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, no. 1–4, pp. 49–79, 1996.

[6] J. Chen, C.-T. Wu, S. Yoon, , and Y. You, "A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 435–466, 2001.

[7] G. Liu, G. Zhang, Y. Wang, Z. H. Zhong, G. Y. Li, , and X. Han, "A nodal integration technique for meshfree radial point interpolation method (ni-rpim)," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 11–12, pp. 3840–3860, 2007.

[8] Q. Duan, B. Wang, X. Gao, , and X. Li, "Quadratically consistent nodal integration for second order meshfree Galerkin methods," *Computational Mechanics*, vol. 54, no. 2, pp. 353–368, 2014.

[9] L. B. da Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, L. Marini, and A. Russo, "Basic principles of virtual element methods," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 23, no. 1, pp. 199–214, 2013.

[10] A. L. Gain, C. Talischi, and G. H. Paulino, "On the virtual element method for three-dimensional elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 282, no. 1, pp. 132–160, 2013.

[11] R. Silva-Valenzuela, A. Ortiz-Bernardin, N. Sakumar, E. Artioli, and N. Hitschfeld-Kahler, "A nodal integration scheme for meshfree Galerkin methods using the virtual element descomposition," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 121, no. 10, pp. 2174–2205, 2020.

[12] D. Millán, N. Sukumar, and M. Arroyo, "Cell-based maximum-entropy approximants,"

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 284, pp. 712–731, 2015.

[13] G. Bourantas, B. F. Zwick, G. Joldes, A. Wittek, and K. Miller, "Simple and robust element-free Galerkin method with interpolating shape functions for finite deformation elasticity," *Computational Engineering, Finance, and Science (cs.CE)*, 2005.

[14] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu, "Element-free Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,*, vol. 37, no. 2, pp. 229–256, 1994.

[15] W. K. Liu, S. Jun, , and Y. F. Zhang, "Reproducing kernel particle methods," *International Journal for Numerical methods in fluids*, vol. 20, pp. 1081–1106, 1995.

[16] N. Sukumar, B. Moran, , and T. Belytschko, "The natural element method in solid mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 43, no. 5, pp. 839–887, 1998.

[17] S. De and K. J. Bathe, "The method of finite spheres," *Computational Mechanics*, vol. 25, no. 4, pp. 329–345, 2000.

[18] S. Atluri and T. Zhu, "A new meshless local Petrov-Galerkin (mlpg) approach in computational mechanics," *Computational Mechanics*, vol. 22, pp. 117–127, 1998.

[19] J. J. Monaghan, "An introduction to SPH," *Computer Physics Communications*, vol. 48, no. 1, pp. 89–96, 1998.

[20] E. Jaynes, *Information Theory and Statistical Mechanics*. Physical Review Journals, 106 (1957).

[21] J. Shore and R. Johnson, "Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy," *IEEE Transactions on Information Theory*, no. 26, pp. 26–37, 1980.

[22] N. Sukumar and R. W. Wright, "Overview and construction of meshfree basis functions: from moving least squares to entropy approximants," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, no. 2, pp. 181–205, 2007.

[23] M. Arroyo and M. Ortiz, "Local maximum-entropy approximation schemes. a seamless bridge between finite elements and meshfree methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, no. 65, pp. 2167–2202, 2006.

[24] G. Joldes, H. Chowdhury, A. Wittek, and K. Miller, "A new method for essential boundary conditions imposition in explicit meshles methods," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 80, pp. 94–104, 2017.

[25] N. Sukumar and R. Wets, "Deriving the continuity of maximum-entropy basis functions via variational analysis," *SIAM J. Optimization*, vol. 18, pp. 914–925, 2007.

[26] M. Arroyo and M. Ortiz, "Local maximum-entropy approximation schemes: Meshfree methods partial differ," *Equations III and Springer Berlin Heidelberg and Berlin and Heidelberg*, pp. 1–16, 2007.

[27] A. Rosolen, C. Peco, and M. Arroyo, "An adaptive meshfree method for phase-field models of biomembranes. part i: Approximation with maximum-entropy basis functions," *Journal of Computational Physics*, vol. 249, pp. 303–319, 2013.

[28] L. Yaw, N. Sukumar, and S. Kunnath, "Meshfree co-rotational formulation for two-

dimensional continua," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, pp. 979–1003, 2009.

[29] A. Ortiz, M. Puso, and N. Sukumar, "Maximum-entropy meshfree method for compressible and near-incompressible elasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 1859–1871, 2010.

[30] J. Hale and P. Baiz, "locking-free meshfree method for the simulation of shear-deformable plates based on a mixed variational formulation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 241–244, pp. 311–322, 2012.

[31] K. Hormann and N. Sukumar, "Maximum entropy coordinates for arbitrary polytopes," *Computer Graphics Forum*, vol. 27, pp. 1513–1520, 2008.

[32] N. Sukumar, "Quadratic maximum-entropy serendipity shape functions for arbitrary planar polygons," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 263, pp. 27–41, 2013.

[33] K. Nissen, C. Cyron, V. Gravemeier, and W. Wall, "Information-flux method: a meshfree maximum-entropy Petrov-Galerkin method including stabilised finite element methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 241–244, pp. 225–237, 2012.

[34] C. Wu, D. Young, and H. Hong, "Adaptive meshless local maximum-entropy finite element method for convection–diffusion problems," *Computational Mechanics*, vol. 53, pp. 189–200, 2014.

[35] S. Atluri, *The Meshless Method*. Forsyth: Tech. Sci. Press, 2002.

[36] R. Liu, *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. Boca Raton: CRC Press, 2003.

[37] Lancaster, P., and K. Salkauskas, "Surfaces generated by moving least-squares methods," *Mathematics of Computation*, vol. 37, no. 155, pp. 141–158, 1981.

[38] Joldes, G.R., Chowdhury, H.A., Wittek, A. Doyle, B., Miller, and K, "Modified moving least squares with polynomial bases for scattered data approximation," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 266, pp. 893–902, 2015.

[39] M. Puso, J. Chen, E. Zywicz, and W. Elmer, "Meshfree and finite element nodal integration methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, no. 3, pp. 416–446, 2008.

[40] C. R. Dohrmann, M. W. Heinstein, J. Jung, S. W. Key, , and W. R. Witkowski, "Node based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, no. 9, pp. 1549–1568, 2000.

[41] J. S. Chen, S. Yoon, , and C. T. Wu, "Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, no. 12, pp. 2587–2615, 2002.

[42] M. Hillman and J.-S. Chen, "An accelerated, convergent, and stable nodal integration in Galerkin meshfree methods for linear and nonlinear mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 107, no. 7, pp. 603–630, 2015.

[43] T. Belytschko, J. Shau-Jen, W. K. Liu, , and J. M. Kennedy, "Hourglass control in linear and nonlinear problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 43, pp. 251–276, 1984.

[44] Z. T. O. Zienkiewcz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 6ta Edición: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

[45] W. K. L. T. Belytschko and B. Moran, *Nonlinear Finite Elements for continua and Structures*. 2da Edición: John Wiley Sons, 2005.

[46] G. Strang, *Linear Algebra and its Application.* NewYork: Academic Press, 1976.

[47] J. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia and PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

[48] R. Ferencz and T. Hughes, "Iterative finite element solutions in nonlinear solid mechanics," *In P.G. Ciarlet and J.L. Lions and editors and Handbook of Numerical Analysis*, vol. 3, pp. 3–178, 1999.

[49] A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis*. NewYork: McGraw-Hill, 1965.

[50] L. Collatz, *The Numerical Treatment of Differential Equations*. Berlin: Springer, 1966.

[51] G. Dahlquist and A. Bjorck, *Numerical Methods*. Englewood Cliffs NJ and NewYork: . Prentice-Hall and Dover, 1974 and 2003.

[52] H. Schwarz, *Numerical Analysis*. Chichester: JohnWiley and Sons, 1989.

[53] J. Simo and L. Vu-Quoc, "A three-dimensional finite strain rod model. part ii: Geometric and computational aspects," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, pp. 79–116, 1986.

[54] L. B. da Veiga, F. Brezzi, L. Marini, and A. Russo, "The hitchhiker's guide to the virtual element method," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 24, no. 08, pp. 1541–1573, 2014.

[55] L. B. da Veiga, F. Brezzi, and L. D. Marini, "Virtual elements for linear elasticity problems," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 51, no. 2, pp. 794–812, 2013.

[56] L. B. da Veiga, F. Dassi, and A. Russo, "High-order virtual element method on polyhedral meshes," *Computers Mathematics with Applications*, vol. 74, no. 5, pp. 1110–1122, 2017.

[57] F. Dassi and L. Mascotto, "Exploring high-order three dimensional virtual elements: Bases and stabilizations," *Computers Mathematics with Applications*, vol. 75, no. 9, pp. 3379–3401, 2018.

[58] E. Artioli, L. B. da Veiga, C. Lovadina, and E. Sacco, "Arbitrary order 2d virtual elements for polygonal meshes: part 1 and elastic problem," *Computational Mechanics*, vol. 60, no. 3, pp. 355–377, 2017.

[59] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6ta Edición: Butterworth-Heinemann, 2005.

[60] Q. Duan, X. Gao, B. Wang, X. Li, and H. Zhang, "A four-point integration scheme with quadratic exactness for three-dimensional element-free Galerkin method based on variationally consistent formulation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 280, no. 0, pp. 84–116, 2014.

[61] A. Ortiz-Bernardin, A. Russo, and N. Sukumar, "Consistent and stable meshfree Galerkin methods using the virtual element decomposition," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 112, no. 7, pp. 655–684, 2017.

[62] C. Talischi and G. H. Paulino, "Addressing integration error for polygonal finite elements through polynomial projections: A patch test connection.," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 24, no. 08, pp. 1701–1727, 2014.

[63] A. F. Bower, *Applied Mechanics of Solids.* FL: CRC Press and Taylor and Francis Group and Boca Raton, 2010.

[64] X. Gao, Q. Duan, Y. Shao, X. Li, B. Chen, and HongwuZhang, "Quadratically consistentone one-point (qc1) integration for three-dimensional element-free Galerkin method," *Computational Mechanics*, vol. 1, no. 5, 2015.

[65] E. Artioli, L. B. da Veiga, C. Lovadina, and E. Sacco, "Arbitrary order 2D virtual elements for polygonal meshes: part ii, inelastic problem," *Computational Mechanics*, vol. 60, no. 4, pp. 643–657, 2017.