

3

Viga de Euler-Bernoulli

Alejandro Ortiz-Bernardin

*Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Av. Beauchef 851, Santiago 8370456, Chile*

CONTENIDO

3.1	Suposiciones cinemáticas	52
3.2	Ecuaciones constitutivas	53
3.3	Forma fuerte	53
3.3.1	Problema de la viga en voladizo	54
3.3.2	Convención de fuerzas internas y eje	54
3.3.3	Diagrama de cuerpo libre	55
3.3.4	Equilibrio de fuerzas	55
3.3.5	Equilibrio de momentos en A	55
3.3.6	Relación curvatura-momento	55
3.4	Forma débil	56
3.5	Energía potencial	58
3.6	Método del elemento finito	59
3.6.1	Vector de desplazamientos	60
3.6.2	Interpolación	60
3.6.3	Matriz de rigidez elemental	62
3.6.4	Vector de fuerzas elemental	63
3.6.5	Sistema elemental	64
3.6.6	Sistema global e implementación computacional	65
3.6.7	Postprocesamiento de datos	66
	Referencias	67

En este capítulo veremos la formulación de un elemento tipo viga de Euler-Bernoulli de dos nodos [1–3]. Para simplificar la formulación nos restringiremos a lo siguiente:

1. Problema bidimensional ($\mathbf{x} - \mathbf{y}$), por lo que la deformación solo ocurre en el plano ($\mathbf{x} - \mathbf{y}$).
2. Todas las cargas actúan en el plano ($\mathbf{x} - \mathbf{y}$).

3. La sección transversal de la viga es simétrica alrededor del eje y , para así prevenir deflexión fuera del plano.

3.1. Suposiciones cinemáticas

Cualquier sección perpendicular al eje neutro permanece plana y perpendicular al eje neutro en todo momento, antes y después de aplicar las cargas.

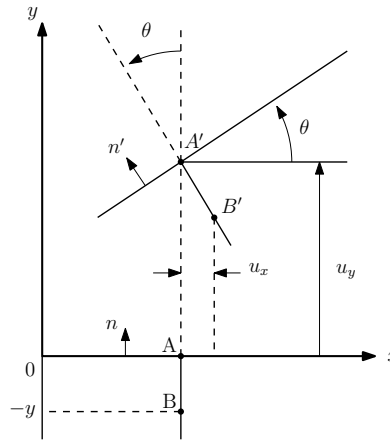


Figura 3.1 Rotaciones en la viga de Euler-Bernoulli.

De la Figura 3.1 obtenemos las siguientes relaciones cinemáticas tomando como referencia el punto B de la sección a una distancia y :

Desplazamiento axial

$$u_x = -y \sin(\theta), \quad (3.1)$$

donde el signo $-$ lo colocamos porque B está a una distancia negativa desde el eje neutro; entonces si y_B es negativo, $u_x = -y \sin(\theta) > 0$. Si restringimos al caso de rotaciones pequeñas, es decir, $\sin(\theta) \approx \theta$, se obtiene:

$$u_x = -y\theta. \quad (3.2)$$

Desplazamiento vertical

Lo denotamos como $u_y = v$ y la teoría supone que $v \equiv v(x)$ es una función de x solamente; Por lo tanto, $\varepsilon_{yy} = 0$.

Deformación axial

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= u_{x,x} \\
 &= -y\theta_{,x} \\
 &= -y \frac{d\theta}{dx}.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Deformación de corte transversal

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= u_{x,y} + u_{y,x} \\
 &= -\theta + \frac{du_y}{dx} \\
 &= -\theta + \theta \\
 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Se puede anticipar que como la sección transversal permanece plana, entonces $\gamma_{xy} = 0$. Concluimos que en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli:

- no se admite la posibilidad de deformación de corte transversal (γ_{xy}).
- la deformación axial ε_{xx} varía linealmente con la distancia y al eje neutro.
- la deformación vertical ε_{yy} es cero porque supone que la deflexión vertical es función de x solamente.

3.2. Ecuaciones constitutivas

La teoría de vigas de Euler-Bernoulli supone que el material es linealmente elástico y que el único esfuerzo distinto de cero es σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = E_Y \varepsilon_{xx} = -E_Y y \frac{d\theta}{dx},
 \tag{3.5}$$

donde E_Y es el módulo de Young.

3.3. Forma fuerte

A continuación, se deriva la forma fuerte para la viga de Euler-Bernoulli en voladizo y sometida a una carga uniformemente distribuida.

3.3.1. Problema de la viga en voladizo

La Figura 3.2 describe el problema de la viga en voladizo sometida a carga uniformemente distribuida.

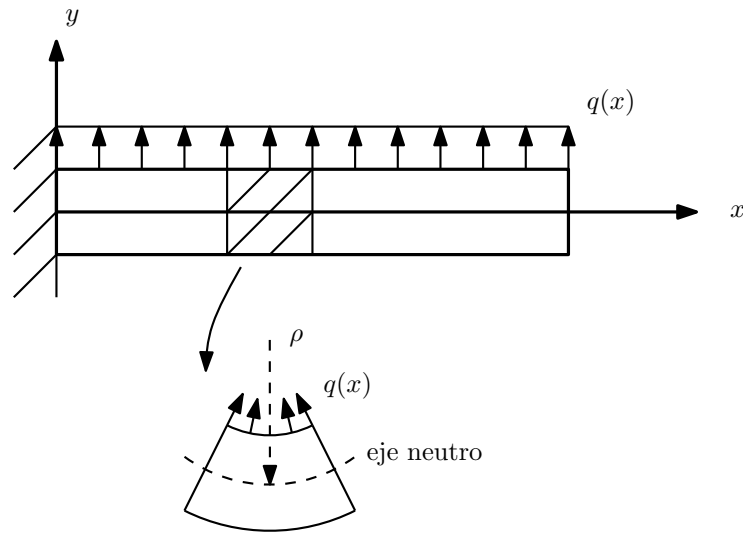


Figura 3.2 Problema de la viga de Euler-Bernoulli.

3.3.2. Convención de fuerzas internas y eje

La Figura 3.3 describe la convención a utilizar en cuanto a fuerzas internas y eje de referencia para el problema de la viga en voladizo sometida a carga uniformemente distribuida.

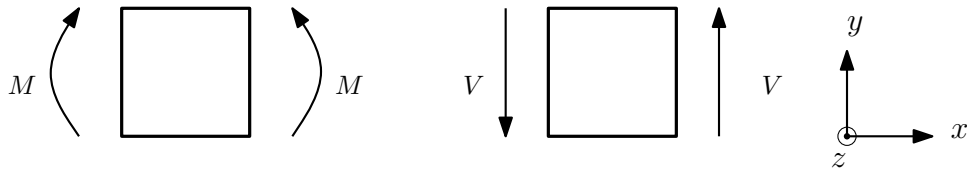


Figura 3.3 Convención de fuerzas internas y eje de referencia en el trozo de viga.

3.3.3. Diagrama de cuerpo libre

La Figura 3.4 presenta el diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial de viga.

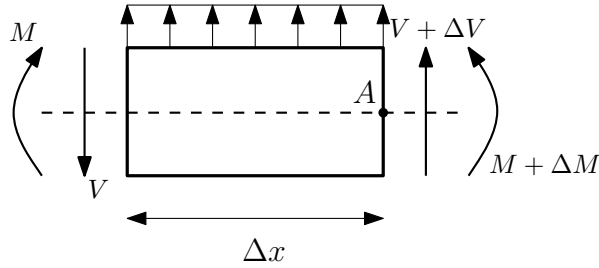


Figura 3.4 Diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial de viga.

3.3.4. Equilibrio de fuerzas

$$(v + \Delta v) - v + q\Delta x = 0. \quad (3.6)$$

Exigiendo que $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{dv}{dx} = -q. \quad (3.7)$$

3.3.5. Equilibrio de momentos en A

$$(M + \Delta M) - M + v\Delta x - q\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0. \quad (3.8)$$

Exigiendo que $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{dM}{dx} = -v. \quad (3.9)$$

3.3.6. Relación curvatura-momento

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_Y I} = u_y''(x) = v''. \quad (3.10)$$

Observación 3.1. Si $u_y = v$ es la deflexión vertical, la fórmula de la curvatura de

una curva plana es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} = \frac{v''}{[1 + \theta^2]^{3/2}}. \quad (3.11)$$

En el caso de rotaciones pequeñas la pendiente es muy pequeña por lo que $[1 + \theta^2]^{3/2} \approx 1$.

$$\frac{1}{\rho} = v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E_Y I}. \quad (3.12)$$

Reemplazando (3.12) en (3.9), se obtiene:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}(E_Y I \frac{d^2v}{dx^2}) = -v, \quad (3.13)$$

por lo que,

$$v = -(E_Y I v'')'. \quad (3.14)$$

Reemplazando (3.14) en (3.7), se obtiene:

$$q = (E_Y I v'')''. \quad (3.15)$$

Si $E_Y I$ es constante y se imponen las condiciones de contorno que se muestran en la Figura 3.5, entonces se obtiene el siguiente problema de valor de contorno (forma fuerte):

$$E_Y I v'''' = q \quad x \in \Omega = (0, L), \quad (3.16a)$$

$$v(0) = \bar{v} = 0, \quad (3.16b)$$

$$v'(0) = \theta(0) = \bar{\theta} = 0, \quad (3.16c)$$

$$M(L) = E_Y I v''(L) = \bar{M} = 0, \quad (3.16d)$$

$$V(L) = -E_Y I v'''(L) = \bar{V} = 0, \quad (3.16e)$$

donde $v(0) = \bar{v}$ y $\theta(0) = \bar{\theta}$ son condiciones de contorno de Dirichlet, y $M(L) = \bar{M}$ y $V(L) = \bar{V}$ son condiciones de contorno de Neumann.

3.4. Forma débil

La forma débil correspondiente al problema de la viga de Euler-Bernoulli se puede obtener aplicando el método de residuos ponderados sobre la ecuación diferencial (3.16a), la que se reescribe del siguiente modo:

$$E_Y I v'''' - q = 0 \quad x \in (0, L). \quad (3.17)$$

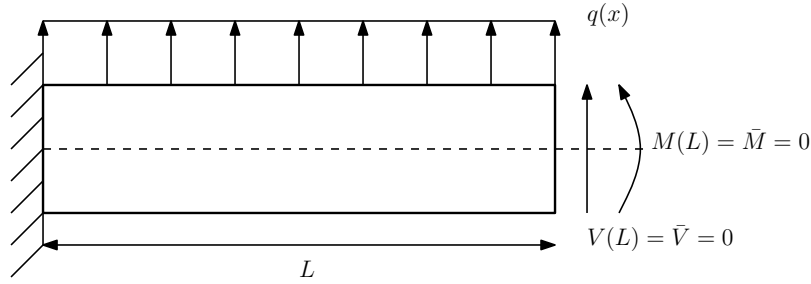


Figura 3.5 Condiciones de borde para el problema de la viga en voladizo.

Multiplicando esta ecuación por una función arbitraria w e integrando en $(0, L)$ se obtiene:

$$\int_0^L [E_Y I v'''' - q] w \, dx = 0$$

$$\int_0^L E_Y I v'''' \, dx - \int_0^L q w \, dx = 0.$$

Integrando por partes, $[E_Y I v'''' w]' = E_Y I v'''' w + E_Y I v'''' w'$:

$$\int_0^L [E_Y I v'''' w]' \, dx - \int_0^L E_Y I v'''' w' \, dx - \int_0^L q w \, dx = 0 \quad (3.19a)$$

$$(E_Y I v'''' w)|_0^L - \underbrace{\int_0^L E_Y I v'''' w' \, dx}_{(*)} - \int_0^L q w \, dx = 0. \quad (3.19b)$$

Integrando nuevamente por partes en $(*)$, $[E_Y I v'' w']' = E_Y I v'' w' + E_Y I v'' w''$:

$$(E_Y I v'''' w)|_0^L - \left\{ \int_0^L [E_Y I v'' w']' \, dx - \int_0^L E_Y I v'' w'' \, dx \right\} - \int_0^L q w \, dx = 0 \quad (3.20a)$$

$$(E_Y I v'''' w)|_0^L - (E_Y I v'' w')|_0^L + \int_0^L E_Y I v'' w'' \, dx - \int_0^L q w \, dx = 0. \quad (3.20b)$$

Por definición de la función w sabemos que $w(0) = 0$ y $w'(0) = 0$, pues en $x = 0$ existen condiciones de contorno de Dirichlet. Entonces:

$$E_Y I v''''(L) w(L) - E_Y I v''(L) w'(L) + \int_0^L E_Y I v'' w'' \, dx - \int_0^L q w \, dx = 0. \quad (3.21)$$

Como las condiciones de Neumann son $E_Y I v''(L) = M(L)$ y $E_Y I v''''(L) = -V(L)$, entonces:

$$\int_0^L E_Y I v'' w'' \, dx = \int_0^L q w \, dx + V(L) w(L) + M(L) w'(L) \quad \forall w \in C^1. \quad (3.22)$$

De (3.22) establecemos los siguientes espacios para las funciones v y w :

$$\int_0^L v^2 dx < \infty, \quad \int_0^L v'^2 dx < \infty, \quad \int_0^L v''^2 dx < \infty, \quad (3.23)$$

por lo que,

$$v \in H^2(0, L) \subset C^1(0, L), \quad w \in H^2(0, L) \subset C^1(0, L). \quad (3.24)$$

Formalmente, se escribe la forma débil del siguiente modo. Encontrar $v \in \mathcal{S}$ tal que:

$$B(v, w) = l(w) \quad \forall w \in \vartheta, \quad (3.25a)$$

$$B(v, w) = \int_0^L E_Y I v'' w'' dx, \quad (3.25b)$$

$$l(w) = \int_0^L q w dx + V(L) w(L) + M(L) w'(L), \quad (3.25c)$$

$$\mathcal{S} = \{v : v \in H^2(0, L), \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = \theta(0) = 0\}, \quad (3.25d)$$

$$\vartheta = \{w : w \in H^2(0, L), \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0\}. \quad (3.25e)$$

3.5. Energía potencial

La forma débil también se puede obtener mediante la minimización del siguiente funcional de energía potencial $\Pi[v]$:

$$\Pi[v] = \frac{1}{2} B(v, v) - l(v) = w_{\text{int}} - w_{\text{ext}}, \quad (3.26a)$$

donde, para la viga de Euler-Bernoulli,

$$w_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L E_Y I (v'')^2 dx \quad (3.26b)$$

$$w_{\text{ext}} = \int_0^L q v dx + V(L) v(L) + M(L) v'(L). \quad (3.26c)$$

La minimización del funcional de energía potencial se lleva a cabo haciendo la variación de Π e igualando a cero, obteniéndose lo siguiente:

$$\frac{1}{2} B(v, \delta v) + \frac{1}{2} B(\delta v, v) - l(\delta v) = 0, \quad (3.27)$$

que, luego de reordenar los términos, lleva a la siguiente forma débil variacional:

$$B(v, \delta v) = l(\delta v) \quad \forall \delta v \in \vartheta, \quad (3.28a)$$

donde

$$B(v, \delta v) = \int_0^L E_Y I v'' \delta v'' dx, \quad (3.28b)$$

$$l(\delta v) = \int_0^L q \delta v dx + V(L) \delta v(L) + M(L) \delta v'(L), \quad (3.28c)$$

donde δv cumple el mismo rol que la función de peso w en la forma débil dada por (3.25).

3.6. Método del elemento finito

Similarmente a lo expuesto en el Capítulo 2, el dominio se discretiza mediante subdominios llamados elementos finitos, que en conjunto conforman la malla de elementos finitos. La Figura 3.6 muestra una discretización referencial del dominio de la viga de Euler-Bernoulli mediante elementos finitos. La nomenclatura utilizada es la siguiente:

- La malla se compone de N nodos y $N - 1$ elementos finitos.
- Los nodos se enumeran del 1 al N , y sus coordenadas se denotan por x_1, x_2, \dots, x_N en el sistema (global) Cartesiano. A esta numeración se le denomina *numeración global* por estar definida en el sistema global.
- A un elemento genérico de la malla lo denotamos por E , y su largo es h_E .

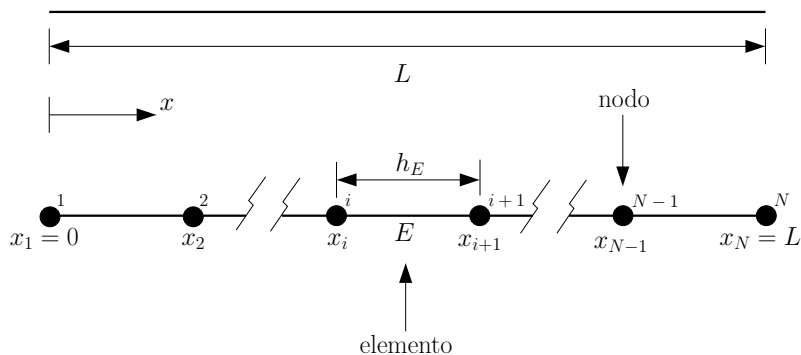


Figura 3.6 Discretización del dominio de la viga de Euler-Bernoulli mediante el método del elemento finito.

En contraste con elemento finito tipo barra de dos nodos tratado en el Capítulo 2, que posee un grado de libertad por nodo, el elemento necesario para llevar a cabo la interpolación por elementos finitos en el problema de la viga de Euler-Bernoulli requiere dos grados de libertad por nodo para representar las variables nodales de la deflexión $v(x)$ y rotación $\theta(x)$, respectivamente. La definición geométrica del elemento finito genérico E de dos grados de libertad por nodo para la viga de Euler-Bernoulli se muestra en la Figura 3.7, donde

- v_1 y v_2 son los grados de libertad de deflexión vertical en los nodos del elemento.
- $\theta_1 = v_1'$ y $\theta_2 = v_2'$ son las rotaciones de la sección transversal de la viga en los nodos del elemento.
- x_i y x_{i+1} son las coordenadas de los nodos del elemento en el sistema (global) Cartesiano.
- h_E es el largo del elemento.

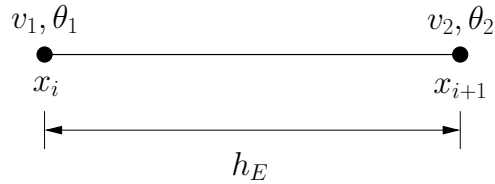


Figura 3.7 Definición geométrica de un elemento finito tipo viga de Euler-Bernoulli de dos nodos.

3.6.1. Vector de desplazamientos

El vector de desplazamientos del elemento de dos nodos se define como:

$$\mathbf{d}_E = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

3.6.2. Interpolación

De la forma débil sabemos que tanto v como v' deben ser continuas. El polinomio de menor grado para aproximar la deflexión v que asegura la continuidad requerida tanto de v como de v' es de orden cúbico, y se define como:

$$v^h(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3, \quad (3.30)$$

donde α_1 , α_2 , α_3 y α_4 son coeficientes. Para encontrar las funciones de forma debemos escribir los coeficientes α 's en términos de las variables nodales v_1 , θ_1 , v_2 , θ_2 . Para lograr esto, imponemos las siguientes restricciones:

$$v^h(x=0) = v_1; \quad v^h(x=h_E) = v_2; \quad (3.31a)$$

$$v'^h(x=0) = \theta_1; \quad v'^h(x=h_E) = \theta_2. \quad (3.31b)$$

Reemplazando las restricciones (3.31) en (3.30) se obtiene lo siguiente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h_E & h_E^2 & h_E^3 \\ 0 & 1 & 2h_E & 3h_E^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_E}, \quad (3.32)$$

con lo que,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}_E. \quad (3.33)$$

Reemplazando (3.33) en (3.30) resulta en

$$v^h(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{d}_E = \mathbf{N}_E \mathbf{d}_E, \quad (3.34)$$

donde la matriz de interpolación \mathbf{N}_E es

$$\mathbf{N}_E = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)], \quad (3.35)$$

que se compone de las funciones de forma N_1 , N_2 , N_3 y N_4 , que permiten escribir la interpolación de la deflexión dentro del elemento finito en la manera usual siguiente:

$$v^h(x) = \mathbf{N}_E \mathbf{d}_E = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2. \quad (3.36)$$

Si dentro del elemento genérico E se define un sistema de coordenadas normalizadas dado por $\xi = \frac{x-x_i}{h_E}$, las cuatro funciones de forma anteriores resultan en

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad (3.37a)$$

$$N_2 = h_E \xi (1 - 2\xi + \xi^2), \quad (3.37b)$$

$$N_3 = \xi^2 (3 - 2\xi), \quad (3.37c)$$

$$N_4 = h_E \xi^2 (\xi - 1), \quad (3.37d)$$

las que se conocen como polinomios cúbicos de Hermite [4]. Utilizando el sistema de coordenadas ξ , la interpolación por elementos finitos de la deflexión dentro del elemento genérico E se escribe como:

$$v^h(\xi) = \mathbf{N}_E \mathbf{d}_E = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)\theta_1 + N_3(\xi)v_2 + N_4(\xi)\theta_2, \quad (3.38)$$

y la interpolación por elementos finitos de la rotación como:

$$\theta^h(\xi) = v'^h(\xi) = \mathbf{N}'_E \mathbf{d}_E = N'_1(\xi)v_1 + N'_2(\xi)\theta_1 + N'_3(\xi)v_2 + N'_4(\xi)\theta_2, \quad (3.39)$$

donde

$$N'_1 = -6\xi + 6\xi^2, \quad (3.40a)$$

$$N'_2 = h_E(1 - 4\xi + 3\xi^2), \quad (3.40b)$$

$$N'_3 = 6\xi - 6\xi^2, \quad (3.40c)$$

$$N'_4 = h_E(3\xi^2 - 2\xi). \quad (3.40d)$$

Los polinomios cúbicos de Hermite con su primera y segunda derivada se muestran gráficamente en la Figura 3.8. Estos polinomios tienen primeras derivadas continuas y segundas derivadas continuas por tramo, por lo que son clasificadas como funciones de continuidad C^1 .

3.6.3. Matriz de rigidez elemental

A continuación, se desarrolla la matriz de rigidez elemental usando las funciones de forma de Hermite. Se comienza por definir la forma bilineal (3.28b) sobre el dominio del elemento de largo h_E :

$$B(v, \delta v) = \int_0^{h_E} E_Y I v'' \delta v'' dx = \int_0^{h_E} E_Y I \theta' \delta \theta' dx. \quad (3.41)$$

Se considera el siguiente cambio de variable:

$$\xi = \frac{x}{h_E} \rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h_E}, \quad (3.42)$$

donde $\xi \in (0, 1)$, y se desarrolla θ' del siguiente modo:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{d\xi} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) = \frac{d}{h_E d\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} \frac{1}{h_E} \right) = \frac{1}{h_E^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2}. \quad (3.43)$$

Reemplazando (3.38) en (3.43) se obtiene la siguiente aproximación:

$$\theta'^h = \frac{1}{h_E^2} \begin{bmatrix} N''_1(\xi) & N''_2(\xi) & N''_3(\xi) & N''_4(\xi) \end{bmatrix} \mathbf{d}_E = \mathbf{B}_E \mathbf{d}_E. \quad (3.44)$$

Reemplazando los polinomios de Hermite (3.37) en (3.44) se obtiene

$$\mathbf{B}_E(\xi) = \frac{1}{h_E^2} \begin{bmatrix} 12\xi - 6 & h_E(6\xi - 4) & -12\xi + 6 & h_E(6\xi - 2) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

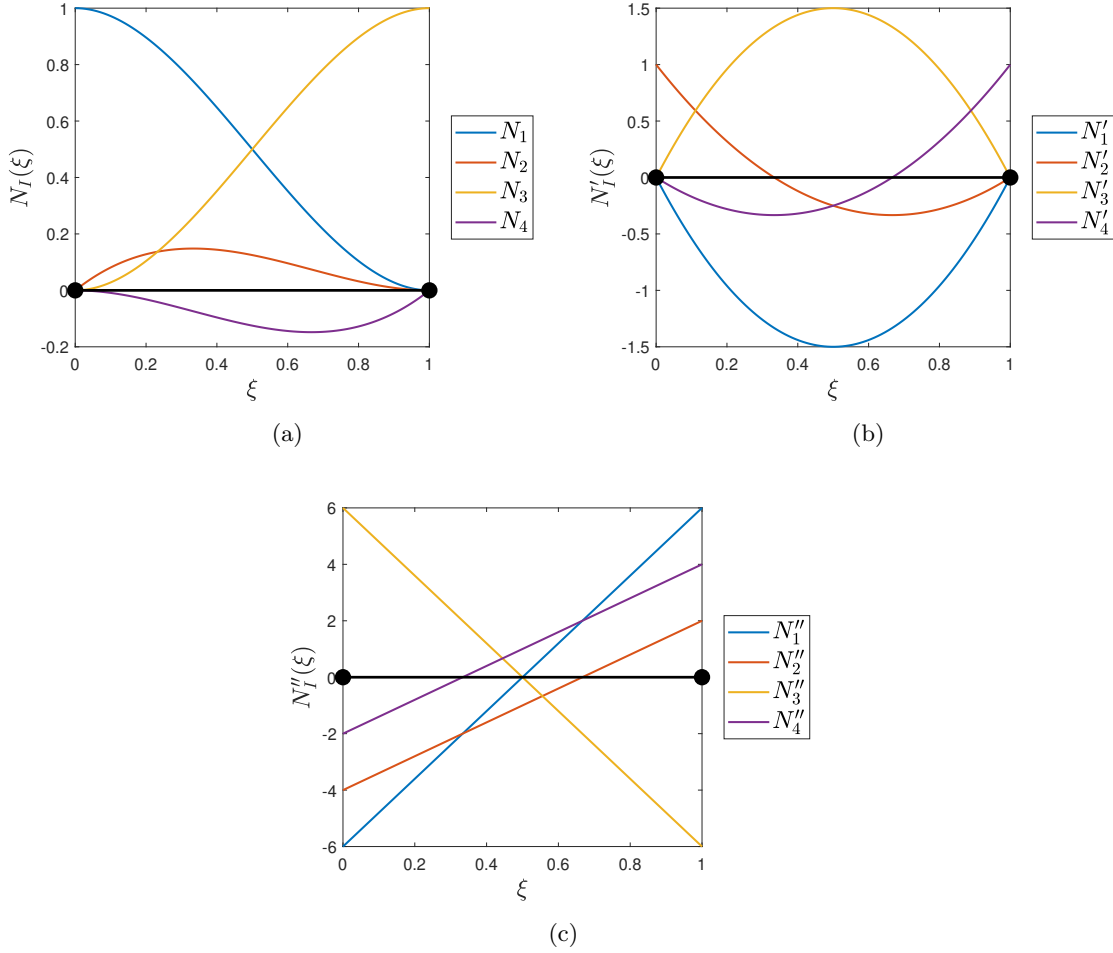


Figura 3.8 Funciones de forma para un elemento de viga de Euler-Bernoulli. (a) Polinomios cúbicos de Hermite, (b) primera derivada de los polinomios de Hermite, y (c) segunda derivada de los polinomios de Hermite.

Luego,

$$\delta\theta'^h = \mathbf{B}_E \delta \mathbf{d}_E, \quad (3.46)$$

con lo que

$$B(v^h, \delta v^h) = (\delta \mathbf{d}_E)^\top \left\{ \underbrace{\int_0^1 h_E E_Y I \mathbf{B}_E^\top \mathbf{B}_E d\xi}_{\mathbf{K}_E} \right\} \mathbf{d}_E, \quad (3.47)$$

donde \mathbf{K}_E es la matriz de rigidez elemental.

3.6.4. Vector de fuerzas elemental

Similarmente, el vector de fuerzas elemental se obtiene a partir de la forma lineal (3.28c) definida sobre el dominio normalizado que es representado por la variable ξ , lo que resulta en

$$l(\delta v^h) = (\delta \mathbf{d}_E)^\top \left\{ \underbrace{\int_0^1 h_E \mathbf{N}_E^\top q \, d\xi + V(1) \mathbf{N}_E^\top(1) + M(1) \mathbf{N}'_E{}^\top(1)}_{\mathbf{f}_E} \right\}, \quad (3.48)$$

donde $V(1) = \bar{V}$, $M(1) = \bar{M}$ corresponden a las condiciones de contorno de Neumann definidas en (3.16), $\mathbf{N}_E = [N_1(\xi) \ N_2(\xi) \ N_3(\xi) \ N_4(\xi)]$ y \mathbf{f}_E es el vector de fuerzas elemental. Observando la Figura 3.8, se advierte que las matrices $\mathbf{N}_E(1)$ y $\mathbf{N}'_E(1)$ se reducen, respectivamente, a lo siguiente:

$$\mathbf{N}_E(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{N}'_E(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Lo anterior revela que las condiciones de Neumann, $V(1) = \bar{V}$, $M(1) = \bar{M}$, están asociadas solo a los grados de libertad v_2 y θ_2 de acuerdo con la definición geométrica del elemento finito tipo viga de Euler-Bernoulli que se muestra en la Figura 3.7. Incluso, la discretización del dominio de la viga de Euler-Bernoulli que se muestra en la Figura 3.6 revela que las condiciones de Neumann $V(1) = \bar{V}$ y $M(1) = \bar{M}$ deberán aplicarse solo en el nodo asociado a los grados de libertad v_2 y θ_2 del elemento $N - 1$ (último elemento en el extremo derecho del dominio). Esto permite desacoplar las condiciones $V(1) = \bar{V}$ y $M(1) = \bar{M}$ para aplicarlas solo al elemento $N - 1$ de la malla. En la práctica, al igual que en el problema de la barra elástica tratado en el Capítulo 2, las condiciones $V(1) = \bar{V}$ y $M(1) = \bar{M}$ se pueden aplicar en el último nodo de la malla (nodo N en la Figura 3.6) una vez que el vector de fuerzas esté ensamblado en el sistema global.

3.6.5. Sistema elemental

Utilizando (3.38), (3.47) y (3.48), se obtiene la siguiente expresión matricial de la forma débil para la viga de Euler-Bernoulli:

$$(\delta \mathbf{d}_E)^\top \left\{ \int_0^1 h_E E_Y I \mathbf{B}_E^\top \mathbf{B}_E \, d\xi \mathbf{d}_E - \int_0^1 h_E \mathbf{N}_E^\top q \, d\xi - V(1) \mathbf{N}_E^\top(1) - M(1) \mathbf{N}'_E{}^\top(1) \right\} = 0. \quad (3.51)$$

Haciendo uso de la arbitrariedad de la función $\delta \mathbf{d}_E$ en (3.51), se obtiene

$$\underbrace{\left\{ \int_0^1 h_E E_Y I \mathbf{B}_E^\top \mathbf{B}_E \, d\xi \right\}}_{\mathbf{K}_E} \mathbf{d}_E = \underbrace{\int_0^1 h_E \mathbf{N}_E^\top q \, d\xi + V(1) \mathbf{N}_E^\top(1) + M(1) \mathbf{N}'_E{}^\top(1)}_{\mathbf{f}_E}. \quad (3.52)$$

Luego de integrar las integrales que aparecen en (3.52), se obtienen las siguientes expresiones para la matriz de rigidez y vector de fuerzas elementales:

$$\mathbf{K}_E = \frac{E_Y I}{h_E^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h_E & -12 & 6h_E \\ 6h_E & 4h_E^2 & -6h_E & 2h_E^2 \\ -12 & -6h_E & 12 & -6h_E \\ 6h_E & 2h_E^2 & -6h_E & 4h_E^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{f}_E = qh_E \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{h_E}{12} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{h_E}{12} \end{bmatrix} + \underbrace{\bar{V} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{solo para el elemento } N-1}. \quad (3.54)$$

3.6.6. Sistema global e implementación computacional

El sistema global consiste en el ensamble de matrices elementales \mathbf{K}_E y \mathbf{f}_E en las matrices globales, que permitirá obtener la solución de todos los grados de libertad de la malla mediante la solución del sistema global de ecuaciones lineales $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$, donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez global, \mathbf{F} es el vector de fuerzas global, y \mathbf{u} es el vector solución global de los grados de libertad de la malla.

En un programa computacional, el ensamble se realiza de manera similar al ensamble de las matrices elementales de la barra elástica que se muestra en el Listado 2.1 del Capítulo 2. Sin embargo, se debe notar que el elemento tipo viga de Euler-Bernoulli posee dos grados de libertad por nodo. Esto, en contraste con el elemento tipo barra, que solo posee un grado de libertad por nodo. Por lo tanto, los algoritmos de ensamble se deben adaptar para dos grados de libertad por nodo. A continuación, se detalla el algoritmo de ensamble de la matriz de rigidez elemental de un elemento tipo viga de Euler-Bernoulli.

Definiendo `ndofs` como el número total de grados de libertad de la malla, que corresponde a dos veces la cantidad total de nodos de la malla, `numel` como el número total de elementos de la malla, `he` como el largo del elemento, un arreglo `connect` que extrae la numeración global de nodos desde la matriz de conectividades¹, `Kg` como la matriz de rigidez global, y `Ke` como la matriz de rigidez elemental, se puede resumir el algoritmo de ensamble de las matrices de rigidez elementales del elemento finito tipo viga de Euler-Bernoulli como se muestra en el Listado 3.1.

El vector de fuerzas global se obtiene de manera similar. La notación utilizada en el

¹La matriz de conectividades sigue el mismo formato utilizado en la matriz de conectividades del problema de la barra elástica del Capítulo 2. En particular, un ejemplo de matriz de conectividades está dado en la Tabla 2.3.

ensamble de la matriz de rigidez elemental se mantiene, pero se adiciona la definición de \mathbf{F}_g como el vector de fuerzas global y de \mathbf{F}_e como el vector de fuerzas elemental. El Listado 3.2 resume el algoritmo de ensamble de los vectores de fuerzas elementales en el vector de fuerzas global.

La imposición de condiciones de contorno de Dirichlet (\bar{v} y $\bar{\theta}$) y la aplicación de condiciones de contorno de Neumann (\bar{V} y \bar{M}) se implementan de manera similar a como se implementaron para el problema de la barra elástica (ver Capítulo 2, Sección 2.4.3).

```

1 Kg = zeros(ndofs,ndofs);
2 % Loop sobre elementos (e = 1,..., numel)
3 for e = 1:numel
4     Ke = E*I/he^3*[12, 6*he, -12, 6*he;...
5                 6*he, 4*he^2, -6*he, 2*he^2;...
6                 -12, -6*he, 12, -6*he;...
7                 6*he, 2*he^2, -6*he, 4*he^2];
8     for Node_I = 1:2 % Loop sobre los nodos del elemento
9         for Node_J = 1:2 % Loop sobre los nodos del elemento
10            for dof_I = 1:2 % Loop sobre los grados de libertad de los nodos
11                g_row = 2*connect(Node_I)-(2-dof_I); % fila global
12                l_row = 2*Node_I-(2-dof_I); % fila local
13                for dof_J = 1:2 % Loop sobre los grados de libertad de los nodos
14                    g_col = 2*connect(Node_J)-(2-dof_J); % columna global
15                    l_col = 2*Node_J-(2-dof_J); % columna local
16                    Kg(g_row,g_col) = Kg(g_row,g_col) + Ke(l_row,l_col);
17                end
18            end
19        end
20    end
21 end

```

Listado 3.1 Implementación en MATLAB del ensamble de las matrices de rigidez elementales para elementos finitos tipo viga de Euler-Bernoulli. La implementación se presenta solo con fines didácticos por lo que no está optimizada.

```

1 Fg = zeros(ndofs,1);
2 % Loop sobre elementos (e = 1,..., numel)
3 for e = 1:numel
4     Fe = q*he*[0.5; he/12; 0.5; -he/12];
5     for Node_I = 1:2 % Loop sobre filas de Fe (Node_I = 1,2)
6         for dof_I = 1:2 % Loop sobre los grados de libertad de los nodos
7             g_row = 2*connect(Node_I)-(2-dof_I); % fila global
8             l_row = 2*Node_I-(2-dof_I); % fila local
9             Fg(g_row) = Fg(g_row) + Fe(l_row);
10        end
11    end
12 end

```

Listado 3.2 Implementación en MATLAB del ensamble de los vectores de fuerzas elementales para elementos finitos tipo viga de Euler-Bernoulli. La implementación se presenta solo con fines didácticos por lo que no está optimizada.

3.6.7. Postprocesamiento de datos

El postprocesamiento de datos consiste en calcular la deflexión, la rotación, el momento flector y la fuerza de corte a lo largo del dominio de la viga de Euler-Bernoulli. Por ejemplo, el postprocesamiento de estas variables sería requerido para plotear los diagramas de deflexión, rotación, momento flector y corte a lo largo de la viga. La deflexión a lo largo de la viga se postprocesa usando (3.38). La rotación a lo largo de la viga se postprocesa usando (3.39). Para postprocesar el momento y la fuerza de corte basta con observar las condiciones de Neumann en la forma fuerte (3.16), donde el momento está dado por

$$M = E_Y I v''(x) \quad (3.55)$$

y la fuerza de corte por

$$V = -E_Y I v'''(x). \quad (3.56)$$

El ploteo de todas estas variables se hace recorriendo los elementos de la malla, por lo que es conveniente tener todas estas variables escritas en función de la coordenada normalizada ξ . Las Ecuaciones (3.38) y (3.39) para la deflexión y rotación, respectivamente, ya están escritas en función de ξ . Para escribir la interpolación por elementos finitos de (3.55) en función de ξ podemos utilizar (3.43), ya que $\theta' = v''(x)$. Esto tiene como resultado la siguiente expresión dentro del elemento genérico E :

$$M^h(\xi) = E_Y I \mathbf{B}_E(\xi) \mathbf{d}_E. \quad (3.57)$$

Similarmente, para escribir la interpolación por elementos finitos de (3.56) en función de ξ , nuevamente podemos utilizar (3.43) para obtener la tercera derivada de v como $v'''(x) = \theta'' = \frac{1}{h_E^3} v'''(\xi)$. Esto resulta en la siguiente expresión para la interpolación por elementos finitos del corte V dentro del elemento genérico E :

$$V^h(\xi) = -E_Y I \mathbf{H}_E(\xi) \mathbf{d}_E, \quad (3.58)$$

donde

$$\mathbf{H}_E(\xi) = \frac{1}{h_E^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h_E & -12 & 6h_E \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Referencias

- [1] J. Fish and T. Belytschko. *A First Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons, Ltd., West Sussex, England, 2007
- [2] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2000

- [3] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Sixth ed. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2005
- [4] M. R. Gosz. *Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2006