

# 2

## Método del Elemento Finito 1D

**Alejandro Ortiz-Bernardin**

*Departamento de Ingeniería Mecánica  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de Chile  
Av. Beauchef 851, Santiago 8370456, Chile*

### CONTENIDO

2.1	Problema de valor de contorno unificado .....	6
2.2	Forma débil .....	7
2.3	Preludio al método del elemento finito .....	11
2.3.1	Método de Rayleigh-Ritz .....	12
2.3.2	Método de Galerkin .....	17
2.4	Método del elemento finito .....	20
2.4.1	Discretización mediante el método del elemento finito ..	21
2.4.1.1	Interpolación por elementos finitos .....	22
2.4.1.2	Forma débil discretizada .....	24
2.4.1.3	Mapeo isoparamétrico e integración numérica	32
	Mapeo isoparamétrico para un elemento finito lineal de dos nodos .....	32
	Mapeo isoparamétrico para un elemento finito cuadrático de dos nodos .....	34
	Integración numérica de Gauss .....	35
2.4.2	Algoritmo para ensamble de matrices y vectores elementales .....	37
	Matriz de rigidez y vector de fuerzas elementales .....	37
	Matriz de rigidez y vector de fuerzas globales .....	38
	Aplicación de las condiciones de contorno de Neumann .....	40
	Imposición de las condiciones de contorno de Dirichlet .....	40
2.4.3	Implementación computacional .....	41
	Implementación del ensamble de las matrices de rigidez elementales .....	41
	Implementación del ensamble de vectores de fuerzas nodales elementales .....	42
	Implementación de la aplicación de las condiciones de contorno de Neumann .....	43

Implementación de la imposición de condiciones de contorno de	
Dirichlet .....	43
2.4.4 Postprocesamiento de datos .....	44
Postprocesamiento de la variable principal .....	44
Postprocesamiento de la variable secundaria .....	44
2.4.5 Error Numérico y Convergencia .....	44
Problemas .....	46
Referencias .....	49

El método del elemento finito (MEF) es un enfoque numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) mediante aproximaciones definidas localmente en subdominios no traslapados (llamados elementos) que conjuntamente forman el dominio global donde se busca una solución al problema gobernado por la EDP. Los elementos finitos son ampliamente usados en diversos campos para resolver problemas estáticos y dinámicos—mecánica de sólidos, mecánica de fluidos, electromagnetismo, biomecánica, entre otros. Existen diversos y variados textos sobre MEF, entre los cuales, los textos de Zienkiewicz y Taylor [?, ?, ?], Bathe [?], Hughes [?], y Reddy [?] proveen una muy buena introducción al método.

En este capítulo se resumen los ingredientes fundamentales del método del elemento finito unidimensional, se estudian algunas aplicaciones y se introduce a la implementación computacional del método.

---

## 2.1. Problema de valor de contorno unificado

Una gran cantidad de problemas prácticos donde se requiere encontrar una función solución  $u(x)$  son gobernados por el problema de valor de contorno unidimensional siguiente:

$$-\frac{d}{dx} \left( \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + \beta(x)u(x) = \gamma(x) \quad \text{para } x \in \Omega = (0, L), \quad (2.1)$$

donde  $x \in \Omega = (0, L)$  se introduce como notación para indicar que  $x$  es la variable independiente en el dominio  $0 < x < L$ ;  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ , y  $\gamma(x)$  son funciones conocidas, y  $u(x)$  es la función incógnita (variable de estado identificada, por ejemplo, con el desplazamiento, temperatura, velocidad, presión, potencial eléctrico, por nombrar algunos). Las funciones  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  usualmente representan propiedades físicas o del material del sistema. Llamaremos *fuerza de volumen* o *fuerza de cuerpo* a  $\gamma(x)$ , ya que esta representa fuerzas aplicadas en el interior del sistema (i.e., en el dominio), aunque su origen se debe a un efecto externo (e.g., aceleración gravitacional, por nombrar uno). Por la misma razón, también suele ser llamado *término fuente*. Dado que la ecuación diferencial (1.1) es de segundo orden, para una solución única, se debe especificar al menos dos condiciones de contorno (también co-

nocidas como condiciones de borde). Se especifican las siguientes condiciones de contorno en  $x = 0$  y  $x = L$ , cada una pudiendo ser una de dos condiciones:

$$\text{en } x = 0, \quad u(0) = g_0 \quad \text{o} \quad \left( -\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) \Big|_{x=0} = t_0, \quad (2.2a)$$

$$\text{en } x = L, \quad u(L) = g_L \quad \text{o} \quad \left( -\alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) \Big|_{x=L} = t_L, \quad (2.2b)$$

donde  $g_0$ ,  $g_L$ ,  $t_0$  y  $t_L$  tienen valores conocidos. Llamaremos condiciones de contorno esenciales (o de Dirichlet) a  $g_0$ ,  $g_L$ , ya que estos son valores conocidos de la variable primaria  $u(x)$  en el contorno; a  $t_0$  y  $t_L$  se les conoce como condiciones de contorno naturales (o de Neumann) y frecuentemente representan el flujo de alguna cantidad (e.g., flujo de calor y flujo eléctrico), un esfuerzo de corte, una fuerza puntual o un término fuente puntual. Algunas de las aplicaciones físicas gobernadas por (1.1) se listan en la Tabla 1.1.

Al problema de valor de contorno dado por (1.1) y (1.2) también se le conoce como *forma fuerte* por requerir una continuidad superior para la función incógnita  $u(x)$  que en la *forma débil* que veremos a continuación.

**TABLA 2.1**

Algunas aplicaciones físicas del problema de valor de contorno unidimensional.

---

Mecánica: Deflexión transversal de un cable flexible.
Elasticidad: Deformación longitudinal de una barra elástica.
Conducción de calor: Distribución de temperatura unidimensional en una estructura sólida.
Electroestática: Distribución de potencial eléctrico unidimensional.
Magnetoestática: Distribución de potencial magnético unidimensional.
Hidrodinámica: Patrón de flujo unidimensional en un fluido incompresible e invíscido.

---

## 2.2. Forma débil

En la ecuación diferencial de segundo orden (1.1) aparecen segundas derivadas de  $u(x)$ . Esto exige una continuidad de al menos  $C^2(\Omega)$ <sup>1</sup> para la función que aproxime a  $u(x)$  (la segunda derivada de  $u(x)$  debe existir en todo  $\Omega$ ). Esta condición es bastante exigente. Por medio de un procedimiento matemático podemos construir una forma integral equivalente que resultará en un *debilitamiento* de esta condición. Un procedimiento bien general es el llamado *método de residuos ponderados* (MRP). En este procedimiento, usamos (1.1) para

<sup>1</sup>Una función  $u$  pertenece al espacio  $C^k(\Omega)$  si todas sus derivadas hasta el orden  $k$  son continuas en el dominio  $\Omega$ .

definir el residual:

$$r(x) = -\frac{d}{dx} \left( \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + \beta(x)u(x) - \gamma(x) \quad \text{para } x \in \Omega = (0, L). \quad (2.3)$$

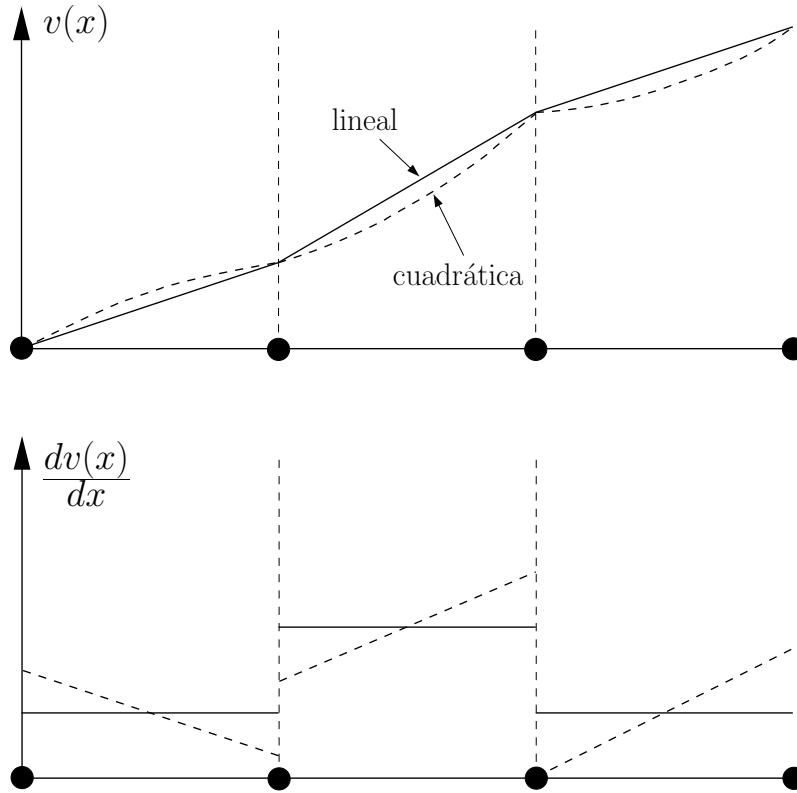
Si  $u(x)$  es la solución exacta, entonces  $r(x) = 0$ , pero para cualquier otra  $u(x)$  (e.g., una aproximación numérica),  $r(x)$  no será en general igual a cero en todos los puntos  $x \in \Omega$ . El MRP consiste en multiplicar  $r(x)$  por una función  $v(x)$  arbitraria conocida como *función de peso* e integrar sobre el dominio  $\Omega$ . Se debe notar que con este procedimiento,  $r(x) = 0$  solo es posible en un sentido de integral ponderada (promedio) y no punto a punto:

$$\begin{aligned} \int_0^L r(x)v(x) dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_0^L \left[ -\frac{d}{dx} \left( \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + \beta(x)u(x) - \gamma(x) \right] v(x) dx &= 0 \quad \forall v, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde la función de peso  $v(x)$  es una función continua por tramos ( $v(x) \in C^0(\Omega)$  será suficiente). Una función continua por tramos es una función que no tiene “saltos”, pero puede tener “pliegues” (zonas donde la pendiente de la función no es continua). Una imagen que ejemplifica lo que se entiende por una función continua por tramos se muestra en la Figura 1.1. En ella se ha discretizado el intervalo de interés  $\Omega = (0, L)$  en tres subintervalos llamados *elementos*, por simplicidad, todos del mismo largo. En la parte superior de la figura se muestran dos posibles alternativas para la función de peso  $v(x)$ . La línea sólida es un ejemplo de una función lineal continua por tramos. La línea segmentada representa una función cuadrática continua por tramos. La parte inferior de la figura contiene las derivadas  $dv(x)/dx$  para ambas alternativas. Aquí se debe notar los saltos en las curvas donde se unen dos elementos. A las uniones interelementales se les denomina *nodos*. Lo otro que se puede rescatar de la Figura 1.1 es que las funciones presentadas se pueden derivar una vez, como se muestra en la parte inferior de la figura, pero la segunda derivada no existe. Es decir, la continuidad de las funciones presentadas son  $C^0(\Omega)$  (aún cuando una es lineal y la otra es cuadrática). Dicho de otro modo, las funciones son continuas en el dominio completo, pero sus primeras derivadas son continuas solo dentro de un subintervalo (elemento).

Observemos que el término  $-\frac{d}{dx} \left( \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right)$  en (1.4) aún no permite insertar una función  $C^0(\Omega)$  para  $u(x)$  (la continuidad de menor grado que se puede usar es  $C^1(\Omega)$ , ya que una segunda derivada discontinua permite resolver la integral). Utilizando la fórmula de integración por partes presentada en el Capítulo ?? (ver Sección ??) podemos bajar el grado de continuidad requerida para  $u(x)$  en este término. Procediendo como se menciona, reemplazando en (1.4), y reordenando términos, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^L \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx + \int_0^L \beta(x)u(x)v(x) dx = \\ \int_0^L \gamma(x)v(x) dx + \left\{ \alpha(L) \frac{du(L)}{dx} v(L) - \alpha(0) \frac{du(0)}{dx} v(0) \right\} \quad \forall v, \end{aligned} \quad (2.5)$$



**Figura 2.1** Funciones continuas por tramo.

de donde se puede observar que ahora  $u(x)$  tiene la misma exigencia mínima de continuidad que  $v(x)$ , es decir,  $C^0(\Omega)$ . Todavía es posible ser más específico con los requisitos para  $u(x)$  y  $v(x)$ . Esto se elaborará a continuación.

En (1.5) queda por incorporar las condiciones de contorno dadas en (1.2). A modo de poder terminar el desarrollo mediante un ejemplo concreto, elegimos las siguientes condiciones: de (1.2a) una condición de Dirichlet  $g_0 = 0.3$  y de (1.2b) una condición de Neumann  $t_L = \alpha(x)$ . Además, definiremos la función de peso  $v(x)$  de modo tal que su valor sea cero en toda ubicación donde exista una condición de contorno de Dirichlet. Más adelante veremos que el cálculo variacional entrega una explicación más intuitiva para esta particular definición de  $v(x)$ . De acuerdo con esta definición de  $v(x)$  y con las condiciones de contorno elegidas, se obtiene  $v(0) = 0$ ,  $u(0) = 0.3$  y  $du(L)/dx = -1$ , valores que al ser reemplazados en (1.5) lleva al siguiente problema conocido como *forma débil*:

Encontrar  $u(x) \in \mathcal{V}$  tal que

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= \ell(v) \quad \forall v(x) \in \mathcal{W}, \\
 a(u, v) &= \int_0^L \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx + \int_0^L \beta(x) u(x) v(x) dx, \\
 \ell(v) &= \int_0^L \gamma(x) v(x) dx - \alpha(L) v(L),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  son los espacios de las funciones continuas de prueba y de peso definidos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &:= \{u(x) : u \in H^1(\Omega), u(0) = 0.3\}, \\
 \mathcal{W} &:= \{v(x) : v \in H^1(\Omega), v(0) = 0\},
 \end{aligned}$$

donde, en virtud de las integrales que aparecen en (1.6), se ha introducido el espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$  que exige que  $u(x)$  y  $v(x)$  permitan que  $\int_0^L uv dx < \infty$ ,  $\int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx < \infty$ , es decir, que las integrales existan. En la definición anterior también se ha introducido el concepto *función de prueba*, el cual se refiere a la variable principal que es la incógnita del sistema. Como se puede observar, los espacios  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  establecen los requisitos para ser más específicos con la elección de  $u(x)$  y  $v(x)$ .

La forma débil (1.6) es el punto de partida para el método del elemento finito y para varios otros métodos numéricos. Las diferencias entre uno y otro método radican en:

- la manera de subdividir o particionar el dominio  $\Omega$ ; por ejemplo, el método del elemento finito lo particiona en subintervalos llamados elementos, mientras que otros lo particionan en puntos discretos.
- la manera de aproximar (o discretizar) las funciones  $u(x)$  y  $v(x)$  dentro de la partición del dominio  $\Omega$ ; esta diferencia se debe básicamente a la forma como se particiona el dominio  $\Omega$ . Detalles sobre algunas formas particulares de particionar y de aproximar, dando origen a distintos métodos numéricos, serán abordados en capítulos posteriores.

Para algunas clases de problemas (especialmente los lineales) se puede desarrollar una forma variacional que es idéntica a la forma débil. La forma variacional se basa en la existencia de un funcional cuadrático  $\Pi[u]$  tal que  $\delta\Pi[u] = 0$  conduce a la forma variacional, donde  $\delta$  opera igual que una derivada y se conoce como operador variación. Si tal  $\Pi[u]$  existe, entonces las formas débil y variacional son idénticas. Sin embargo, no todas las EDPs cuentan con un funcional  $\Pi[u]$ , lo que limita la aplicabilidad de la forma variacional. En contraste, el enfoque de la forma débil es más general, ya que es aplicable a cualquier EDP. Para la ecuación diferencial (1.1) con condiciones de contorno  $g_0 = 0.3$  y  $t_L = \alpha(x)$ ,

se puede escribir  $\Pi[u]$  como

$$\begin{aligned} \Pi[u] = \frac{1}{2} \int_0^L \alpha(x) \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx \\ + \frac{1}{2} \int_0^L \beta(x) u^2(x) dx - \int_0^L \gamma(x) u(x) dx + \alpha(L) u(L), \end{aligned} \quad (2.7)$$

y la forma variacional se desarrolla estableciendo

$$\delta \Pi[u] = 0, \quad u(x) \in \mathcal{V}, \quad (2.8)$$

con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^L \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{d\delta u(x)}{dx} dx + \int_0^L \beta(x) u(x) \delta u(x) dx = \\ \int_0^L \gamma(x) \delta u(x) dx - \alpha(L) \delta u(L) \quad \forall \delta u(x) \in \mathcal{W}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

que es idéntica a la forma débil dada en (1.6) cuando se realiza el cambio de variable  $\delta u \equiv v$ . Con respecto al comportamiento de la variación  $\delta u$  en las ubicaciones donde a  $u(x)$  se le impone un valor conocido (condiciones de contorno de Dirichlet), se advierte que  $u(x)$  no puede variar, ya que esta debe satisfacer la condición de contorno impuesta. Entonces, en el contorno de Dirichlet decimos que  $\delta u = 0$  (la variación debe ser cero). Como  $\delta u \equiv v$ , lo anterior explica por qué en la forma débil habíamos definido que  $v(x)$  debía ser cero en el contorno de Dirichlet.

### 2.3. Preludio al método del elemento finito

Hasta aquí hemos visto que cuando un problema cuenta con un funcional cuadrático las formas variacional y débil son idénticas. Podemos resumir este resultado como se elabora a continuación.

En la forma débil (1.6),  $a(u, v)$  es simétrica y lineal en  $u$  y  $v$  por lo que se le conoce con el nombre de *forma bilineal*, y  $\ell(v)$  es lineal en  $v$  por lo que recibe el nombre de *forma lineal*. Notar que lo anterior es un caso particular para la forma débil (1.6). Existen problemas en que  $a(u, v)$  puede ser no simétrica en  $u$  y  $v$ , e incluso puede ser no lineal en  $u$  ( $a(u, v)$  siempre es lineal en  $v$ ). Solo cuando  $a(u, v)$  sea bilineal y simétrica en  $u$  y  $v$ , y  $\ell(v)$  sea lineal, entonces la forma débil será equivalente a minimizar el siguiente funcional cuadrático:

$$\Pi[u] = \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u). \quad (2.10)$$

A modo de ejemplo, la Ecuación (1.7) es el resultado de utilizar (1.10) para la forma débil (1.6).

El siguiente objetivo es discretizar las ecuaciones, es decir, aproximar  $u$  (y  $v$  cuando aparezca) utilizando, por ejemplo, un polinomio. Un método de discretización que es anterior al método del elemento finito es el *método de Rayleigh-Ritz*.

### 2.3.1. Método de Rayleigh-Ritz

Para ejemplificar el método de Rayleigh-Ritz consideremos una barra axial de longitud  $L$ , área de sección transversal  $A$  y fabricada con un material elástico lineal cuyo módulo de elasticidad es  $E_Y$ , fija en un extremo y traccionada mediante una fuerza puntual  $P$  en el extremo opuesto. La barra se muestra en la Figura 1.2. La forma fuerte para este problema está dada por (1.1) con  $\alpha(x) = E_Y A$ ,  $\beta(x) = 0$ ,  $\gamma(x) = 0$ , y condiciones de contorno dadas por (1.2) con  $g_0 = 0$  y  $t_L = -P$ . Utilizando (1.5) con las condiciones de contorno anteriores, se obtiene la siguiente forma débil:

Encontrar  $u(x) \in \mathcal{V}$  tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \ell(v) \quad \forall v(x) \in \mathcal{W}, \\ a(u, v) &= \int_0^L E_Y A \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx, \\ \ell(v) &= E_Y A \frac{dv(L)}{dx} = Pv(L), \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  son los espacios de las funciones continuas de prueba y de peso definidos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \{u(x) : u \in H^1(\Omega), u(0) = 0\}, \\ \mathcal{W} &:= \{v(x) : v \in H^1(\Omega), v(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Utilizando la forma débil (1.11) y la fórmula del funcional cuadrático dada en (1.10), se puede escribir el siguiente funcional  $\Pi[u]$ :

$$\Pi[u] = \frac{1}{2} \int_0^L E_Y A \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - Pu(L). \tag{2.12}$$

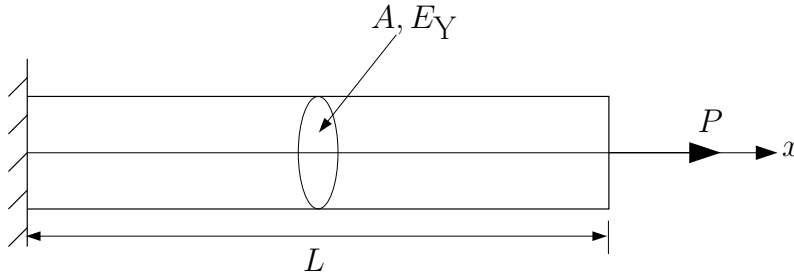
En problemas de mecánica estructural y de sólidos, como es el caso de la barra sometida a tracción, el funcional cuadrático  $\Pi[u]$  recibe el nombre de funcional de energía potencial, y el problema  $\delta\Pi[u] = 0$ , se identifica con el *principio de la energía potencial total mínima*. En el caso de la barra elástica bajo análisis, el término  $\frac{1}{2} \int_0^L E_Y A (du(x)/dx)^2 dx$  representa la energía de deformación elástica almacenada en la barra,  $Pu(L)$  representa la energía o el trabajo desarrollado por la fuerza externa aplicada, y  $\Pi[u]$  representa la energía potencial



total de la barra. Tras realizar  $\delta\Pi[u] = 0$  en (1.12) resulta

$$\delta\Pi[u] = \int_0^L E_Y A \frac{du(x)}{dx} \frac{d\delta u(x)}{dx} dx - P\delta u(L) = 0, \quad (2.13)$$

que es un caso particular del *principio del trabajo virtual* para un sistema mecánico elástico y sometido a fuerzas conservativas, y representa el cambio o variación en la energía potencial total debido a los *desplazamientos virtuales*  $\delta u$ . Dentro de este contexto, se entiende por desplazamiento virtual a un desplazamiento arbitrario, no necesariamente infinitesimal, pero sí lo suficientemente pequeño como para no perder la linealidad de las ecuaciones. Además, el desplazamiento virtual debe ser compatible con la continuidad que requiere el desplazamiento dentro y sobre el contorno del dominio.



**Figura 2.2** Barra axial elástica sometida a fuerza puntual de tracción.

La solución exacta de la barra axial elástica sometida a una fuerza puntual de tracción es:

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad \varepsilon = \frac{P}{E_Y A}, \quad u(x) = \frac{P}{E_Y A} x + a_1, \quad (2.14)$$

donde  $a_1$  es una constante a determinar. Aplicando las condiciones de contorno de Dirichlet se obtiene  $u(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ , por lo que la solución exacta del desplazamiento es:

$$u(x) = \frac{P}{E_Y A} x. \quad (2.15)$$

En el método de Rayleigh-Ritz se busca una solución aproximada de  $u(x)$ , la que denotaremos por  $u^N(x)$ , en la forma de una serie finita:

$$u(x) \approx u^N(x) = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x), \quad (2.16)$$

donde  $c_j$  son los *coeficientes de Rayleigh-Ritz* a determinar; las funciones  $\phi_0(x)$  y  $\phi_j(x)$  son funciones de aproximación que deben cumplir los siguientes requisitos:

- (a) El set  $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^N$  debe formar una base linealmente independiente.
- (b) Las funciones  $\phi_j(x)$  deben valer cero donde exista una condición de contorno esencial (Dirichlet).
- (c) Las funciones  $\phi_j(x)$  deben ser suficientemente diferenciables en el funcional  $\Pi[u]$ . En particular, sus primeras derivadas no pueden ser cero, de otro modo, la componente de energía elástica en (1.12), y en general, en funcionales como (1.7), será nula. Además, deben ser integrables en el funcional  $\Pi[u]$ .
- (d) El set  $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^N$  debe ser *completo*. Por ejemplo, si  $\phi_j(x)$  son polinomios, la completitud requiere que el set  $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^N$  contenga todos los monomios desde el más bajo grado admisible hasta el grado más alto deseado.
- (e) El único requisito para la función  $\phi_0(x)$  es que esta debe ser la función de menor orden que satisfaga las condiciones de contorno esenciales (Dirichlet).

Antes de continuar, es conveniente detenerse sobre las condiciones (b) y (e), pues estas resultan claves en la satisfacción de las condiciones de contorno esenciales. Supongamos que la condición de contorno esencial a satisfacer es  $u(x_0) = u_0$ . Esta condición requiere que la aproximación (1.16) satisfaga

$$u^N(x_0) = \phi_0(x_0) + \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x_0) = u_0. \quad (2.17)$$

Por el requisito (e), se elige  $\phi_0(x)$  tal que  $\phi_0(x_0) = u_0$ , por lo que

$$u^N(x_0) = u_0 + \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x_0) = u_0 \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x_0) = 0. \quad (2.18)$$

Notar que, aún cuando  $\phi_0(x_0) = u_0$ , el resultado  $\sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x_0) = 0$  no está garantizado, sino que más bien es una condición que se debe cumplir para que la condición de contorno esencial se satisfaga. Para  $c_j$  arbitrario, la condición  $\sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x_0) = 0$  se satisface automáticamente si las funciones  $\phi_j(x)$  se eligen tal que  $\phi_j(x_0) = 0$ , que es el requisito (b).

**Ejemplo 2.1.** En un dominio unidimensional  $\Omega = (0, 1)$ , suponer las siguientes condiciones de contorno esenciales (Dirichlet):  $u(0) = 0$  y  $u(1) = 0$ . Proponer una aproximación de Rayleigh-Ritz en base polinomial de tres términos.

Las condiciones de contorno esenciales especificadas son todas homogéneas (i.e., son cero). Por analogía con el desarrollo hecho en (1.17) y (1.18), se requiere que  $\phi_0(0) = 0$  y  $\phi_0(1) = 0$ . Dado que 0 es la función de más bajo orden que cumple con las condiciones de contorno esenciales (requisito (e)), entonces se elige  $\phi_0(x) = 0$ . Las funciones  $\phi_j(x)$

se deben elegir tal que cumplan el requisito (b). Por ejemplo, la función  $(0-x)(1-x)$  es cero en  $x = 0$  y  $x = 1$ , y sus primeras derivadas no son cero (requisito (c)). Además, son integrables en un funcional cuadrático (e.g., similar a (1.12)) (requisito (c)). Entonces, se elige  $\phi_1(x) = x(1-x)$ . Las siguientes dos funciones, que también son cero en  $x = 0$  y  $x = 1$ , y cumplen con los requisitos de diferenciabilidad e integrabilidad, son obviamente  $\phi_2(x) = x^2(1-x)$  y  $\phi_3(x) = x^3(1-x)$ . Se puede comprobar que las funciones elegidas son linealmente independientes (requisito (a)). Con todo esto, la aproximación de Rayleigh-Ritz queda como:

$$u^N(x) = c_1x(1-x) + c_2x^2(1-x) + c_3x^3(1-x).$$

Las funciones de aproximación (o de base) de Rayleigh-Ritz elegidas se muestran gráficamente en la Figura 1.3. De esta figura se destaca el carácter global que tienen las funciones de base, ya que cada una de ellas cubre todo el dominio de análisis. Entonces, se dice que estas funciones poseen soporte global.

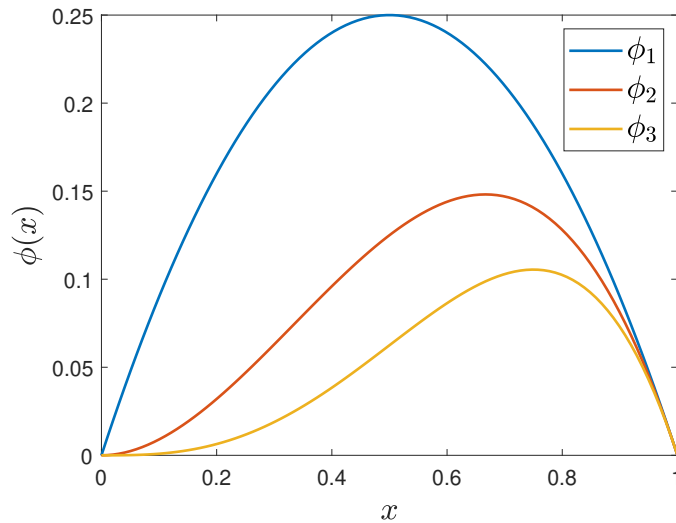


Figura 2.3 Funciones de aproximación o de base de Rayleigh-Ritz del Ejemplo 1.1.

**Ejemplo 2.2.** Suponer que en el Ejemplo 1.1, la aproximación de Rayleigh-Ritz propuesta es:

$$u^N(x) = c_2x^2(1-x) + c_3x^3(1-x).$$

¿Es factible utilizar esta aproximación?

La aproximación propuesta no se puede utilizar, ya que no es completa (requisito (d) no se cumple). Para garantizar su completitud, se debe incorporar la función de aproximación  $x(1-x)$  en la base  $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ , ya que es el monomio de más bajo grado admisible (requisito (d)).

Si bien es posible utilizar diversos tipos de funciones de aproximación que cumplan con los requisitos establecidos anteriormente, resulta conveniente utilizar bases polinomiales, ya que estas son fáciles de diferenciar e integrar. Volviendo al problema de la barra, y teniendo en cuenta que se conoce su solución exacta (Ecuación (1.15)), se puede utilizar, por ejemplo, la aproximación de Rayleigh-Ritz de un monomio  $\{\phi_j\}_{j=1}^1 = \{x\}$ , con lo que la aproximación queda como

$$u^N(x) = \phi_0(x) + c_1x. \quad (2.19)$$

Ahora, se debe verificar que la solución propuesta sea cinemáticamente admisible, es decir, que satisfaga la condición de contorno de Dirichlet:  $u^N(0) = 0 \Rightarrow \phi_0(0) = 0$ , y como 0 es la función de más bajo orden que satisface la condición de contorno esencial (requisito (d)), se elige  $\phi_0(x) = 0$ . Por lo tanto,  $u^N(x)$  cinemáticamente admisible debe tener la forma:

$$u^N(x) = c_1x. \quad (2.20)$$

Luego, se reemplaza (1.20) en el funcional (1.12), lo que resulta en

$$\Pi[u^N] = \Pi(c_1) = \frac{1}{2} \int_0^L E_Y A c_1^2 dx - P c_1 L = \frac{1}{2} E_Y A c_1^2 L - P c_1 L. \quad (2.21)$$

En el siguiente paso, se utiliza el principio de la energía potencial total mínima, es decir, se resuelve el siguiente problema de minimización:

$$\min_u \Pi[u^N] = \min_{c_1} \Pi(c_1), \quad (2.22)$$

el que se puede desarrollar, equivalentemente, haciendo  $\frac{d\Pi}{dc_1} = 0$  (en general, cuando hay múltiples coeficientes,  $\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0$  con  $i = 1, 2, 3, \dots$ ), o realizando la variación  $\delta \Pi(c_1) = 0$ . A continuación, se desarrollan los dos métodos.

Comenzamos con el método de las derivadas.

$$\frac{d\Pi}{dc_1} = 0 : \quad E_Y A L c_1 - P L = 0.$$

Resolviendo  $c_1$  en esta ecuación resulta en  $c_1 = \frac{P}{E_Y A}$ , y substituyendo este último resultado en la solución admisible propuesta (1.20), lleva a la siguiente aproximación de Rayleigh-Ritz:

$$u^N(x) = \frac{P}{E_Y A} x,$$

que coincide con la solución exacta (1.15).

Seguimos con el método variacional.

$$\delta\Pi = 0 : E_Y A L c_1 \delta c_1 - P L \delta c_1 = 0 \Rightarrow \delta c_1 (E_Y A L c_1 - P L) = 0,$$

y dado que las variaciones  $\delta c_1$  son arbitrarias, entonces

$$E_Y A L c_1 - P L = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{P}{E_Y A}.$$

Reemplazando este último resultado en la solución admisible propuesta (1.20), lleva a la siguiente aproximación de Rayleigh-Ritz:

$$u^N(x) = \frac{P}{E_Y A} x,$$

que es idéntica a la obtenida con el método de las derivas y a la solución exacta (1.15).

De este sencillo ejemplo, se puede concluir que si la aproximación de Rayleigh-Ritz contiene a la solución exacta dentro del espacio de aproximación, entonces la solución exacta siempre será la solución de Rayleigh-Ritz. Para el problema de la barra, se podría proponer, por ejemplo, una aproximación cuadrática  $u^N(x) = \phi_0(x) + c_1 x + c_2 x^2$ . No obstante, en este caso en particular, se llegaría nuevamente a la solución exacta por estar contenida en la base polinomial cuadrática. En este sentido, la aproximación de Rayleigh-Ritz entrega los mejores coeficientes  $c_j$  posibles que minimizan  $\Pi[u]$ .

### 2.3.2. Método de Galerkin

La antesala al método del elemento finito es la aplicación de la aproximación de Rayleigh-Ritz directamente en la forma débil. Para esto, se deberá aproximar tanto la función de prueba  $u(x)$  como la función de peso  $v(x)$ . Si se elige reemplazar la aproximación (1.16) con la misma base  $\{\phi_j\}_{j=1}^N$  tanto para  $u(x)$  como para  $v(x)$  en (1.11), entonces nos referiremos al *método de Galerkin*. La utilización de bases distintas, por ejemplo,  $u^N(x) = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x)$  y  $v^N(x) = \sum_{i=1}^N b_i \psi_i(x)$ , con  $\phi_j \neq \psi_j$ , se conoce como el *método de Petrov-Galerkin*.

**Observación 2.1.** Por definición de la forma débil, es requisito que la función de peso  $v(x)$  sea cero donde exista una condición de contorno esencial. En otras palabras, esto es equivalente a requerir que la función de peso satisfaga condiciones de contorno esenciales homogéneas (i.e., condiciones de contorno esenciales cuyos valores impuestos son cero). Por lo tanto, la aproximación de Rayleigh-Ritz para la función de peso es de la forma

$$v^N(x) = \sum_{i=1}^N b_i \phi_i(x),$$

donde se ha utilizado que  $\phi_0(x) = 0$ , ya que, por analogía con el desarrollo hecho en (1.17) y (1.18) con  $u_0 = 0$  (también ver Ejemplo 1.1), esta es una condición necesaria para que  $v^N(x)$  satisfaga condiciones de contorno esenciales homogéneas.

En lo que queda de esta sección, se considera el método de Galerkin. Es decir, se utiliza (1.16) para escribir las aproximaciones

$$u^N(x) = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x), \quad v^N(x) = \sum_{i=1}^N b_i \phi_i(x). \quad (2.23)$$

Para facilitar la lectura del desarrollo que sigue, se omite la dependencia de la variable  $x$  en las funciones de aproximación, i.e., se usa la notación  $\phi_0 \equiv \phi_0(x)$  y  $\phi_j \equiv \phi_j(x)$ . Reemplazando (1.23) en (1.11), se obtiene

$$a\left(\phi_0 + \sum_{j=1}^N c_j \phi_j, \sum_{i=1}^N b_i \phi_i\right) = \ell\left(\sum_{i=1}^N b_i \phi_i\right). \quad (2.24)$$

Apelando a la linealidad de  $a(\cdot, \cdot)$  y  $\ell(\cdot)$ , la Ecuación (1.24) se expresa como

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_j a(\phi_j, \phi_i) b_i = \sum_{i=1}^N b_i \left\{ \ell(\phi_i) - a(\phi_0, \phi_i) \right\}. \quad (2.25)$$

Utilizando la simetría de  $a(\cdot, \cdot)$ , la Ecuación (1.25) puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_i a(\phi_i, \phi_j) c_j = \sum_{i=1}^N b_i \left\{ \ell(\phi_i) - a(\phi_i, \phi_0) \right\}. \quad (2.26)$$

Definiendo  $K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$  y  $f_i = \ell(\phi_i) - a(\phi_i, \phi_0)$ , y utilizando estas definiciones en (1.26), permite escribir

$$\sum_{i=1}^N b_i \left\{ \sum_{j=1}^N K_{ij} c_j - f_i \right\} = 0. \quad (2.27)$$

Finalmente, apelando a la arbitrariedad de los coeficientes  $b_i$  (las funciones  $v(x)$  son arbitrarias) en (1.27), resulta el siguiente sistema de ecuaciones de  $N$  incógnitas:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N K_{ij} c_j - f_i \right\} = 0, \quad (2.28)$$

el que puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{Kc} = \mathbf{f}, \quad (2.29a)$$

donde la matriz  $\mathbf{K}$ , cuyas entradas son

$$K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \quad i = \{1, \dots, N\}, \quad j = \{1, \dots, N\}, \quad (2.29b)$$

se denomina *matriz de rigidez*; el vector  $\mathbf{f}$ , cuyas entradas son

$$f_i = \ell(\phi_i) - a(\phi_i, \phi_0), \quad i = \{1, \dots, N\}, \quad (2.29c)$$

se conoce como *vector de fuerzas*, y  $\mathbf{c}$  es el vector de incógnitas cuyas entradas son los coeficientes  $c_j$ .

**Ejemplo 2.3.** Suponer  $N = 4$  términos en la base. Obtener las expresiones para  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{f}$ . Utilizar la notación  $\phi'_i \equiv \frac{du(x)}{dx}$ .

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \int_0^L E_Y A \phi'_1 \phi'_1 dx & \int_0^L E_Y A \phi'_1 \phi'_2 dx & \int_0^L E_Y A \phi'_1 \phi'_3 dx & \int_0^L E_Y A \phi'_1 \phi'_4 dx \\ & \int_0^L E_Y A \phi'_2 \phi'_2 dx & \int_0^L E_Y A \phi'_2 \phi'_3 dx & \int_0^L E_Y A \phi'_2 \phi'_4 dx \\ & & \int_0^L E_Y A \phi'_3 \phi'_3 dx & \int_0^L E_Y A \phi'_3 \phi'_4 dx \\ \text{sim.} & & & \int_0^L E_Y A \phi'_4 \phi'_4 dx \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} P\phi_1(L) - \int_0^L E_Y A \phi'_1 \phi'_0 dx \\ P\phi_2(L) - \int_0^L E_Y A \phi'_2 \phi'_0 dx \\ P\phi_3(L) - \int_0^L E_Y A \phi'_3 \phi'_0 dx \\ P\phi_4(L) - \int_0^L E_Y A \phi'_4 \phi'_0 dx \end{bmatrix}.$$

Si las condiciones de contorno esenciales fueran valores constantes, entonces  $\phi'_0 = 0$ , lo que simplificaría el vector  $\mathbf{f}$ .

### Comentarios sobre el método de Rayleigh-Ritz en el enfoque de Galerkin

- $\mathbf{K}$  es una matriz densa cuyo tamaño depende de la cantidad  $N$  de términos en la base, por lo que el costo de su formación y de la solución del sistema de ecuaciones puede volverse muy elevado. El sistema se resuelve más eficientemente cuando  $\mathbf{K}$  es esparcida (i.e., contiene muchos ceros).
- $\phi_j$  tiene soporte global, es decir, cubre todo el dominio de análisis. Esta es la razón por la que  $\mathbf{K}$  es una matriz densa.
- En 1D es fácil definir funciones de aproximación con soporte global, pero en 2D y 3D es difícil.

- En problemas con comportamiento localizado y/o pronunciado (por ejemplo, comportamiento alrededor de la punta de una grieta), es difícil construir una función  $\phi_j$  con soporte global que sea capaz de aproximar la variable en la zona de localización.

---

## 2.4. Método del elemento finito

En la Sección 1.3 (ver Ejemplo 1.1), se estableció el carácter global de la función de base o de aproximación en el método de Rayleigh-Ritz, ya que esta abarca todo el dominio de análisis. En el método de Rayleigh-Ritz no existe ni se usa el concepto de elemento. Por el contrario, en el método del elemento finito (MEF), el dominio de análisis se discretiza<sup>2</sup> en subdominios no traslapados llamados elementos, que en conjunto forman la *mall*a de elementos finitos. Cada elemento posee una cierta cantidad de nodos que depende del orden de aproximación del elemento. Un elemento finito de primer orden (lineal) posee dos nodos. La función de base se asocia a un nodo y se define solo en una porción del dominio que comprende el o los elementos que rodean al nodo. Es decir, la función de base del MEF posee soporte compacto. Otra distinción del MEF es que sus funciones de base son polinomiales. A modo de ejemplo, en la Figura 1.4 se muestran las funciones de base en el dominio  $\Omega = (0, 1)$  que ha sido discretizado mediante cuatro elementos finitos lineales de dos nodos cada uno, lo que da un total de cinco nodos en la malla. Si se analiza, por ejemplo, la función de base  $\phi_3(x)$ , se puede establecer lo siguiente:

- El soporte de  $\phi_3(x)$  es compacto, ya que se extiende solo sobre los dos elementos que se unen en el nodo central de coordenada  $x = 0.5$ .
- En el nodo central,  $\phi_3(0.5) = 1$ ; en cualquier otro nodo su valor es cero.
- La forma de la función de base se asemeja a un sombrero, razón por la cual recibe el nombre de función “sombrero”. Esta función es lineal o de primer orden.

El ejercicio anterior se puede realizar con cualquiera de las funciones de base mostradas en la Figura 1.4, por lo que el análisis es válido para cualquiera de ellas. La letra (b) es consecuencia de la propiedad *delta Kronecker* que poseen las funciones “sombrero”, y se puede generalizar como:

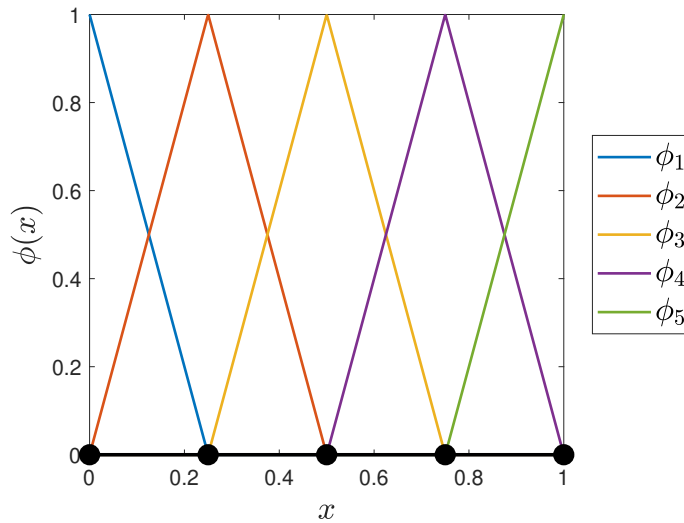
---

<sup>2</sup>El concepto de *discretización* lo aplicamos tanto para el dominio como para las variables a aproximar. En el primer caso, se refiere a que el dominio se particiona en subdominios no traslapados llamados elementos. En el segundo caso, se refiere a que las variables se aproximan en el elemento.



Sean  $x_j$  la coordenada del nodo  $j$  y  $\phi_i(x)$  la función de base “sombbrero” del nodo  $i$ . Entonces,

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (2.30)$$



**Figura 2.4** Funciones de base lineales o de primer orden para el método del elemento finito unidimensional.

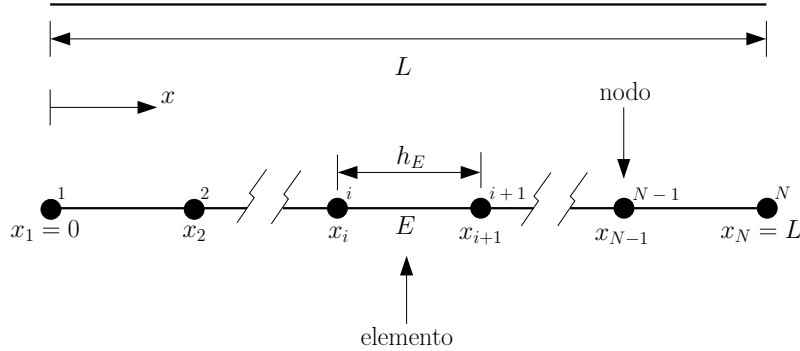
La ventaja más relevante del método del elemento finito sobre el método de Rayleigh-Ritz radica en el carácter compacto de las funciones de base del primero, ya que debido a esto, la matriz de rigidez resultará en una matriz bandeda (entradas no nulas se concentran en una banda a lo largo de la diagonal de la matriz) permitiendo resolver de manera más eficiente el sistema de ecuaciones resultante.

#### 2.4.1. Discretización mediante el método del elemento finito

La Figura 1.5 muestra una discretización referencial del dominio mediante elementos finitos lineales. En ella se indica la nomenclatura a utilizar:

- La malla se compone de  $N$  nodos y  $N - 1$  elementos finitos.
- Los nodos se enumeran del 1 al  $N$ , y sus coordenadas se denotan por  $x_1, x_2, \dots, x_N$  en el sistema (global) Cartesiano. A esta numeración se le denomina *numeración global* por estar definida en el sistema global.

- A un elemento genérico de la malla lo denotamos por  $E$ , y su largo es  $h_E$ .



**Figura 2.5** Discretización de un dominio unidimensional mediante el método del elemento finito.

#### 2.4.1.1. Interpolación por elementos finitos

Utilizando de las funciones de base “sombbrero”, que están definidas en el sistema global Cartesiano, se discretiza la función de prueba del siguiente modo:

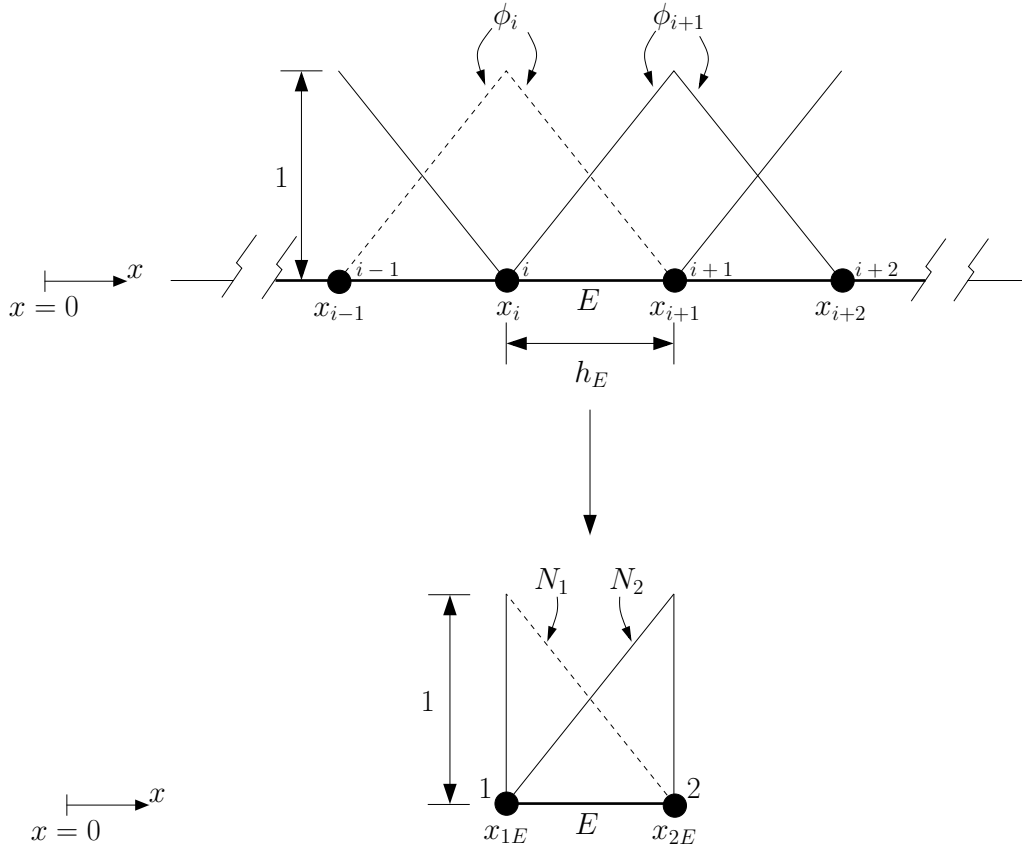
$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i, \quad (2.31)$$

que es una aproximación global. Debido a que las funciones de base  $\phi_i(x)$  poseen soporte compacto, en el MEF la discretización no se lleva a cabo usando la aproximación global (1.31) sino que usando su representación local en el elemento. A partir de las funciones de base “sombbrero”, se construyen funciones de aproximación local en el elemento, las que se denominan *funciones de forma*. La Figura 1.6 presenta de manera esquemática la construcción de las funciones de forma  $N_1(x)$  y  $N_2(x)$  para un elemento finito lineal de dos nodos.

De la Figura 1.6, se desprende que las funciones de forma corresponden a la restricción de las funciones de base al elemento, o en otras palabras, son las caras “visibles” (desde el elemento) de las funciones de base asociadas a los dos nodos que definen el elemento. Sus expresiones se obtienen suponiendo la siguiente función de prueba lineal sobre el elemento:

$$u_E^h(x) = c_1 + c_2(x - x_{1E}), \quad (2.32)$$

donde el subíndice  $E$  se usa para resaltar que la función de prueba se restringe al elemento, el superíndice  $h$  para destacar que la función de prueba es, en general, aproximada y dependiente del tamaño del elemento, y  $x_{1E}$  es la coordenada Cartesiana del primer nodo



**Figura 2.6** Construcción de las funciones de forma para un elemento finito lineal de dos nodos.

del elemento  $E$  (según Figura 1.6);  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Para determinar estas constantes, se usan las siguientes condiciones en los nodos del elemento:

$$u_E^h(x_{1E}) = u_1, \quad u_E^h(x_{2E}) = u_2, \quad (2.33)$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  representan los valores discretos de la variable  $u$  en los nodos del elemento, los que se denominan *grados de libertad nodales*. Substituyendo la condición del lado izquierdo de (1.33) en (1.32) se obtiene  $c_1 = u_1$ . Substituyendo la condición del lado derecho en (1.32) se obtiene  $c_2 = (u_2 - u_1)/h_E$ , donde  $h_E = x_{2E} - x_{1E}$  es el largo del elemento. Reemplazando estas expresiones para  $c_1$  y  $c_2$  de vuelta en (1.32) y simplificando, se obtiene

$$u_E^h(x) = \left(1 - \frac{x - x_{1E}}{h_E}\right) u_1 + \frac{x - x_{1E}}{h_E} u_2. \quad (2.34)$$

Las dos funciones de  $x$  que aparecen en (1.34) son las funciones de forma que buscábamos, es decir,

$$N_1(x) = 1 - \frac{x - x_{1E}}{h_E}, \quad N_2(x) = \frac{x - x_{1E}}{h_E}. \quad (2.35)$$

Las funciones de forma poseen las siguientes propiedades:

- Heredan la propiedad delta Kronecker de las funciones de base globales tipo “sombrero” (Ecuación (1.30)), es decir,

$$N_I(x_J) = \delta_{IJ}, \quad (2.36)$$

donde se han utilizado los subíndices en mayúscula para enfatizar que la numeración de los nodos es en el sistema local, que en este caso va de 1 a 2.

- Son interpolantes, ya que debido a la propiedad delta Kronecker, la aproximación pasa por los valores nodales:

$$\begin{aligned} u_E^h(x_{1E}) &= N_1(x_{1E})u_1 + N_2(x_{1E})u_2 = u_1, \\ u_E^h(x_{2E}) &= N_1(x_{2E})u_1 + N_2(x_{2E})u_2 = u_2, \end{aligned} \quad (2.37)$$

por lo que en la literatura del MEF es usual referirse a la aproximación  $u_E^h(x)$  con el término más específico de *interpolación por elementos finitos*.

- Forman una partición de unidad (también lo hacen las funciones de base), es decir, satisfacen la siguiente relación:

$$N_1 + N_2 = 1. \quad (2.38)$$

Usando (1.35), la Ecuación (1.34) se puede escribir de manera más compacta del siguiente modo:

$$u_E^h(x) = \sum_{I=1}^2 N_I(x)u_I. \quad (2.39)$$

Ya estamos bien equipados para presentar la discretización formal de la forma débil mediante la interpolación por elementos finitos.

#### 2.4.1.2. Forma débil discretizada

Suponiendo la existencia de una forma bilineal  $a(u, v)$  y de una forma lineal  $\ell(v)$  que se obtienen luego de aplicar el método de residuos ponderados a la ecuación diferencial de segundo orden (1.1) (ver el desarrollo completo en la Sección 1.2), la forma débil se lee:

Encontrar  $u(x) \in \mathcal{V}$  tal que

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v(x) \in \mathcal{V}, \quad (2.40)$$

donde  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  son los espacios de las funciones continuas de prueba y de peso definidos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &:= \{u(x) : u \in H^1(\Omega), u(x_D) = g_D\}, \\ \mathcal{W} &:= \{v(x) : v \in H^1(\Omega), v(x_D) = 0\}.\end{aligned}$$

En estos espacios se ha usado, de manera genérica, la notación  $x_D$  para representar la coordenada de un nodo donde existe una condición de contorno de Dirichlet  $g_D$ . La forma débil (1.40) representa el problema continuo en el entendido de que ni el dominio ni las variables de interés han sido discretizadas. Utilizaremos el MEF para construir la forma débil discretizada.

**Observación 2.2.** La forma débil continua (1.40) establece que la función de prueba se evalúa en el interior del dominio y en el contorno de Dirichlet. Por otro lado, establece que la función de peso se evalúa en el interior del dominio y en el contorno de Neumann. Con respecto al contorno de Dirichlet, establece que  $v(x_D) = 0$ , pero como en el contorno la función de peso solo interviene en el contorno de Neumann, basta con garantizar que  $v(x_D) = 0$  para toda función de peso proveniente del interior del dominio. En otras palabras, se deben utilizar funciones de peso cuyos soportes se desvanezcan antes de llegar al contorno de Dirichlet.

**Observación 2.3.** El espacio  $\mathcal{V}$  establece que la condición de contorno de Dirichlet debe ser reproducible por la función de prueba. Sea  $x_D$  la coordenada de un nodo donde existe una condición de contorno de Dirichlet. Sea  $u^h$  la aproximación global por elementos finitos definida en (1.31). Entonces, debido a la propiedad delta Kronecker (1.30), la aproximación de  $u$  por elementos finitos reproduce la condición de contorno de Dirichlet automáticamente, como se demuestra a continuación:

$$g_D = u^h(x_D) = \sum_i \phi_i(x_D)u_i = \phi_D(x_D)u_D = \delta_{DD}u_D = u_D.$$

**Observación 2.4.** El espacio  $\mathcal{W}$  establece que donde exista una condición de contorno de Dirichlet, la función de peso debe ser cero. Sea  $x_D$  la coordenada de un nodo donde existe una condición de contorno de Dirichlet, y sea  $i$  cualquier otro nodo que no tiene asignado una condición de contorno de Dirichlet. Sea  $v^h$  una aproximación global de la

forma (1.31). Entonces, debido a la propiedad delta Kronecker (1.30), la aproximación de  $v$  por elementos finitos satisface la condición  $v^h(x_D) = 0$  automáticamente, como se demuestra a continuación:

$$v^h(x_D) = \sum_{i \neq D} \phi_i(x_D) v_i = \sum_{i \neq D} \delta_{iD} v_i = 0.$$

No se necesita verificar esta condición en el nodo  $i = D$ , ya que  $v$  no interviene de manera directa en el contorno de Dirichlet (ver Observación 1.2). Por lo tanto, la función de peso puede ser discretizada mediante la aproximación (1.31), ya que la condición  $v^h(x_D) = 0$  está garantizada.

Se discretiza el dominio  $\Omega$  mediante elementos finitos no traslapados, formando una malla como la mostrada en la Figura 1.5, y a la que denotamos por  $\mathcal{T}^h$ . En el MEF se utiliza el enfoque de Galerkin, por lo que  $u$  y  $v$  se discretizan usando la interpolación (1.39) (ver Observación 1.4). En el enfoque de Galerkin, se definen los espacios locales discretos de las funciones de prueba y de peso en el elemento, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^h|_E &:= \{u_E^h(x) : u_E^h \in H^1(E)\}, \\ \mathcal{W}^h|_E &:= \mathcal{V}^h|_E, \end{aligned}$$

donde  $|_E$  significa restricción al elemento  $E$ . Mediante el ensamble de estos espacios locales elementales se construyen los siguientes espacios globales discretos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^h &:= \{u(x) \in \mathcal{V} : u|_E \in \mathcal{V}^h|_E \quad \forall E \in \mathcal{T}^h\}, \\ \mathcal{W}^h &:= \mathcal{V}^h, \end{aligned}$$

lo que permite evaluar la forma débil evaluando a nivel elemental, y luego sumando las contribuciones elementales, es decir,

$$a^h(u^h, v^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} a_E^h(u_E^h, v_E^h), \quad \ell(v^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} \ell_{\gamma, E}(v_E^h) + \text{cond. Neumann}, \quad (2.41)$$

donde  $\ell_{\gamma, E}(v_E^h)$  es la forma lineal asociada al término  $\gamma$  de (1.6).

**Observación 2.5.** Notar que en el espacio local  $\mathcal{V}^h|_E$  no se exige la condición de contorno de Dirichlet. Esta condición se exige en el espacio global  $\mathcal{V}^h$  después del ensamble, y se reproduce automáticamente como se menciona en la Observación 1.3.

**Ejemplo 2.4.** Para mostrar mediante un ejemplo didáctico cómo se resuelve un problema mediante el MEF utilizando (1.41), se resuelve el siguiente problema de valor de contorno (forma fuerte):

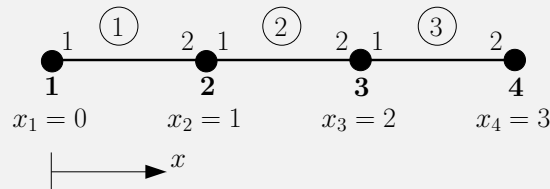
$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + 1 = 0 \quad \text{para } x \in \Omega = (0, 3)$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du(3)}{dx} = 1.$$

Este problema corresponde a (1.1) con los siguientes parámetros:  $\alpha(x) = -1$ ,  $\beta(x) = 0$ ,  $\gamma(x) = -1$  y  $L = 3$ . Las condiciones de contorno corresponden a (1.2) con los siguientes parámetros:  $g_0 = 0$  y  $t_L = 1$ . La forma débil se obtiene utilizando los parámetros anteriores en (1.5). Procediendo de ese modo resulta lo siguiente:

$$a(u, v) = \ell(v), \quad a(u, v) = \int_0^3 \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx, \quad \ell(v) = \int_0^3 v(x) dx + v(3).$$

Discretizamos el dominio con tres elementos lineales como se muestra en la Figura 1.7, donde numeración global de nodos se muestra con fuente ennegrecida y la numeración local de nodos en cada elemento se muestra con fuente normal. También se muestran las coordenadas de cada nodo en el sistema global Cartesiano. La numeración de los elementos se muestra con números inscritos en círculos.



**Figura 2.7** Discretización del dominio con tres elementos finitos lineales.

La función de prueba  $u$  y la función de peso  $v$  se discretizan usando (1.39). Expandiendo las sumatorias, estas interpolaciones se pueden escribir en forma matricial del siguiente modo:

$$u_E^h(x) = \mathbf{N}_E \mathbf{u}_E, \quad v_E^h(x) = \mathbf{N}_E \mathbf{v}_E,$$

donde

$$\mathbf{N}_E = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}$$

es la matriz de funciones de forma, y

$$\mathbf{u}_E = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^\top,$$

son vectores que contienen los grados de libertad nodales y las variables nodales arbitrarias, respectivamente.

Las derivadas discretas de  $u$  y  $v$  se obtienen derivando las interpolaciones  $u_E^h(x)$  y  $v_E^h(x)$ , respectivamente. El resultado es el siguiente:

$$\frac{du_E^h(x)}{dx} = \mathbf{B}_E \mathbf{u}_E, \quad \frac{dv_E^h(x)}{dx} = \mathbf{B}_E \mathbf{v}_E,$$

donde

$$\mathbf{B}_E = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix}$$

es la matriz de derivadas conocida como *matriz de deformaciones*.

La forma bilineal elemental se obtiene substituyendo las expresiones discretas  $\frac{du_E^h(x)}{dx}$  y  $\frac{dv_E^h(x)}{dx}$  en  $a(u, v)$  resultando lo siguiente:

$$a_E(u_E^h, v_E^h) = \mathbf{v}_E^\top \left( \int_E \mathbf{B}_E^\top \mathbf{B}_E dx \right) \mathbf{u}_E.$$

En cuanto a la forma lineal primero trabajamos sobre la condición de contorno de Neumann. En este caso es la expresión  $v(3)$ . Primero, se advierte que esta expresión está evaluada en la coordenada  $x = 3$ . Como sabemos que las funciones de forma solo están definidas dentro del elemento, es inmediato que la coordenada  $x = 3$  corresponde al nodo 2 del elemento 3 (ver Figura 1.7). Por lo tanto, hay dos expresiones discretas para  $v(3)$ :

$$\begin{aligned} v_E^h(3) &= \mathbf{N}_E \mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_E, & E = \{1, 2\} \\ v_E^h(3) &= \mathbf{N}_E \mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_E, & E = 3. \end{aligned}$$

Utilizando el resultado anterior, la forma lineal elemental queda como

$$\begin{aligned} \ell_{\gamma, E}(v_E^h) &= \mathbf{v}_E^\top \left( \int_E \mathbf{N}_E^\top dx \right), & E = \{1, 2\}; \\ \ell_{\gamma, E}(v_E^h) &= \mathbf{v}_E^\top \left( \int_E \mathbf{N}_E^\top dx + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \right), & E = 3. \end{aligned}$$



Finalmente, la forma débil discreta queda del siguiente modo:

$$a_E(u_E^h, v_E^h) = \ell_{\gamma, E}(v_E^h) \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_E^\top \left( \left[ \int_E \mathbf{B}_E^\top \mathbf{B}_E dx \right] \mathbf{u}_E - \int_E \mathbf{N}_E^\top dx - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \right) = 0,$$

donde se ha considerado la forma lineal discreta para  $E = 3$ , ya que es más general al contener las expresiones para  $E = 1$  y  $E = 2$ . Debido a la arbitrariedad de los valores nodales  $\mathbf{v}_E^\top$ , la última expresión resulta en el siguiente sistema de ecuaciones elemental:

$$\mathbf{K}_E \mathbf{u}_E - \mathbf{f}_E = 0,$$

donde  $\mathbf{K}_E$  es la matriz de rigidez elemental dada por

$$\mathbf{K}_E = \int_E \mathbf{B}_E^\top \mathbf{B}_E dx,$$

y  $\mathbf{f}_E$  es el vector de fuerzas nodales elemental cuya expresión es

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_E &= \int_E \mathbf{N}_E^\top dx, \quad E = \{1, 2\}; \\ \mathbf{f}_E &= \int_E \mathbf{N}_E^\top dx + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, \quad E = 3. \end{aligned}$$

Las integrales anteriores pueden ser calculadas algebraicamente, ya que  $\mathbf{B}_E$  es constante por provenir de la derivada de un polinomio de primer orden, de hecho,

$$\mathbf{B}_E = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_E} & \frac{1}{h_E} \end{bmatrix},$$

y  $\mathbf{N}_E$  solo contiene polinomios de primer orden. Otra alternativa es resolverlas simbólicamente utilizando algún paquete matemático. Una tercera alternativa es resolverlas mediante integración numérica. Cualquiera de estas opciones entregará el mismo resultado, ya que estas integrales pueden calcularse exactamente. Integrando resultan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_E &= \frac{1}{h_E} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{f}_E &= \frac{h_E}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \{1, 2\}; \\ \mathbf{f}_E &= \frac{h_E}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = 3. \end{aligned}$$

En el siguiente paso, se realiza el ensamble de las matrices locales (elementales) en las matrices globales. El ensamble se hace relacionando la numeración local de nodos con la numeración global de nodos. Esta relación la podemos encontrar utilizando matrices booleanas. Sin embargo, este procedimiento solo se presenta con fines didácticos, y solo porque el problema tiene unos pocos elementos. En la programación de un código computacional, donde se pueden resolver problemas con varios millones de grados de libertad, se usan otros procedimientos más eficientes. Observando la numeración global (fuente ennegrecida) y local (fuente normal) de nodos en la Figura 1.7, se puede establecer la relación entre los grados de libertad local y global de los elementos. Por ejemplo, para el elemento 2 resulta lo siguiente:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \mathbf{L}_2 \mathbf{u}.$$

En general, para cada elemento se tiene la relación:

$$\mathbf{u}_E = \mathbf{L}_E \mathbf{u}.$$

Realizando este procedimiento para cada elemento de la malla, se obtienen todas las matrices booleanas:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando las matrices booleanas, se ensamblan todas las matrices y vectores elementales en la matriz y vector globales, y luego se suman todas las contribuciones. Procediendo de ese modo, se obtiene el siguiente sistema global de ecuaciones:

$$\left[ \mathbf{L}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3^T \mathbf{K}_3 \mathbf{L}_3 \right] \mathbf{u} = \mathbf{L}_1^T \mathbf{f}_1 + \mathbf{L}_2^T \mathbf{f}_2 + \mathbf{L}_3^T \mathbf{f}_3.$$

Debido a que el largo de cada elemento en este ejemplo es el mismo ( $h_E = 1$ ), las

matrices y vectores elementales quedan como sigue:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con las expresiones anteriores se realizan las multiplicaciones matriciales en el sistema global de ecuaciones obteniéndose lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y luego de realizar las adiciones matriciales, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Este sistema es simétrico y, hasta ahora, singular ( $\det \mathbf{K} = 0$ ). Para eliminar la singularidad, se debe imponer la condición de contorno esencial (Dirichlet)  $u(0) = 0$ , la que en la malla utilizada corresponde a aplicarla en el grado de libertad asociado al nodo 1 global, es decir,  $u_1 = 0$ . Imponiendo esta condición, el sistema se reduce a

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

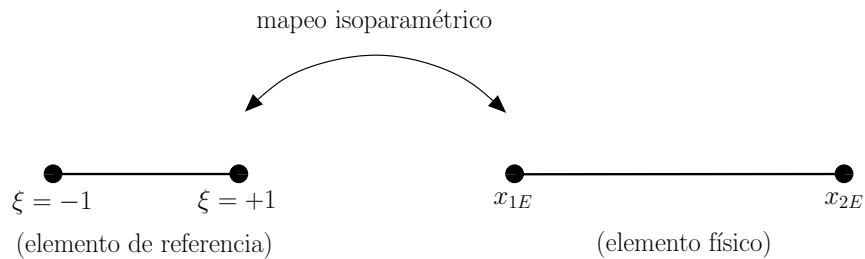
Este sistema se resuelve, y se obtiene la siguiente solución nodal:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7/2 \\ 6 \\ 15/2 \end{bmatrix}.$$

### 2.4.1.3. Mapeo isoparamétrico e integración numérica

Ya se mencionó que las matrices y vectores elementales se pueden integrar mediante integración numérica. Sin embargo, en el MEF unidimensional, no es necesario integrar numéricamente, ya que las integrales al provenir de polinomios pueden ser integradas exactamente de manera algebraica. No obstante, en dos y tres dimensiones, aún cuando las interpolaciones son polinomiales, no siempre es directo integrar algebraicamente por lo que en esos casos integrar numéricamente es muy útil.

El tipo de integración numérica más utilizada es la integración de Gauss. Para usarla, debemos mapear el dominio físico descrito en el sistema Cartesiano a un dominio de referencia descrito en un sistema normalizado. Este mapeo se conoce como *mapeo isoparamétrico* y se muestra esquemáticamente en la Figura 1.8. En síntesis, todos los elementos de la malla, cada uno con su tamaño  $h_E$ , se mapean al elemento de referencia de largo único e igual a 2, y las integrales se resuelven sobre este elemento de referencia.



**Figura 2.8** Mapeo isoparamétrico para un elemento lineal de dos nodos.

#### Mapeo isoparamétrico para un elemento finito lineal de dos nodos

La relación que define el mapeo isoparamétrico entre la coordenada Cartesiana  $x$  y la coordenada normalizada  $\xi$  es

$$x = N_1(\xi)x_{1E} + N_2(\xi)x_{2E}, \quad (2.42)$$

donde

$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad N_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad (2.43)$$

son las funciones de forma en el sistema de referencia normalizado.

Para poder integrar las formas bilineal y lineal discretas, se debe mapear el dominio de integración  $dx$  y las derivadas  $dN_I(x)/dx$  al sistema normalizado. Se comienza por reemplazar (1.43) en (1.42), y luego de manipulaciones algebraicas, se obtiene la siguiente expresión:

$$x = \frac{x_{1E} + x_{2E}}{2} + h_E \frac{\xi}{2}, \quad (2.44)$$

la que tras derivar con respecto a  $\xi$  resulta en

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{h_E}{2} \rightarrow dx = \frac{h_E}{2} d\xi = j d\xi, \quad (2.45)$$

donde  $j = h_E/2$  es el Jacobiano del mapeo isoparamétrico.

El mapeo de la derivada se obtiene del siguiente modo:

$$\frac{dN_I(x)}{dx} = \frac{dN_I(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_I(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j}. \quad (2.46)$$

**Ejemplo 2.5.** Expresar las matrices elementales del Ejemplo 1.4 en el sistema normalizado utilizando el mapeo isoparamétrico.

**Matriz de funciones de forma:** la transformación es directa, y se puede comprobar reemplazando (1.42) en (1.35), y en el desarrollo algebraico, utilizando la propiedad partición de unidad (1.38). El resultado es

$$\mathbf{N}_E = \begin{bmatrix} N_1(x(\xi)) & N_2(x(\xi)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{bmatrix}.$$

**Matriz de deformación:**

$$\mathbf{B}_E = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} & \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} \end{bmatrix}.$$

**Matriz de rigidez:**

$$\mathbf{K}_E = \int_E \mathbf{B}_E^\top(x) \mathbf{B}_E(x) dx = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_E(\xi)^\top \mathbf{B}_E(\xi) j d\xi$$

**Vector de fuerzas nodales:**

$$\mathbf{f}_E = \int_E \mathbf{N}_E^\top(x) dx = \int_{-1}^1 \mathbf{N}_E^\top(\xi) j d\xi.$$

### Mapeo isoparamétrico para un elemento finito cuadrático de dos nodos

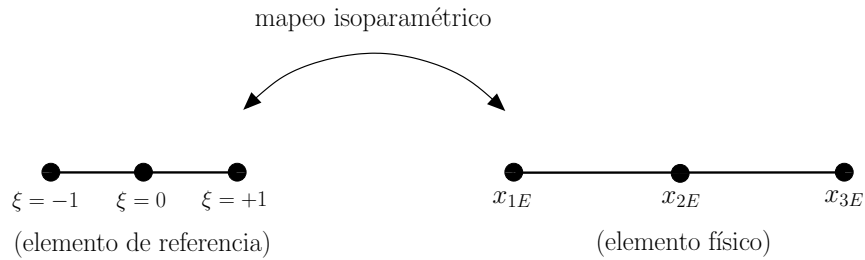
Hasta aquí no se han tratado elementos finitos unidimensionales de orden superior. El mapeo isoparamétrico resulta ser un buen ejercicio para introducir el elemento finito cuadrático de tres nodos. El mapeo isoparamétrico para este elemento se muestra esquemáticamente en la Figura 1.9. De manera análoga al elemento lineal de dos nodos, la relación entre la coordenada Cartesiana  $x$  y la coordenada normalizada  $\xi$  es

$$x = N_1(\xi)x_{1E} + N_2(\xi)x_{2E} + N_3(\xi)x_{3E}, \quad (2.47)$$

donde

$$N_1(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2, \quad N_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1 + \xi). \quad (2.48)$$

son las funciones de forma cuadráticas en el sistema de referencia normalizado. Estas tres funciones de forma se muestran en la Figura 1.10. Estas funciones, al igual que las de un elemento finito lineal de dos nodos, también poseen la propiedad delta Kronecker, son interpolantes y forman una partición de unidad.

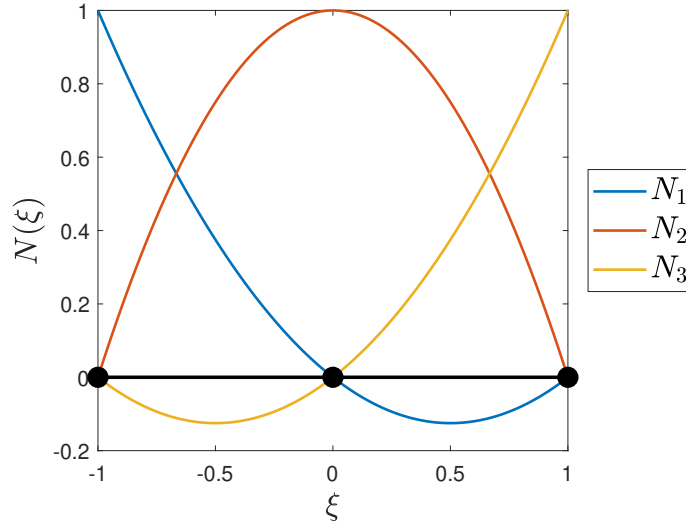


**Figura 2.9** Mapeo isoparamétrico para un elemento cuadrático de tres nodos.

Siguiendo el mismo procedimiento hecho para el elemento lineal, se puede demostrar que el Jacobiano del mapeo isoparamétrico para el elemento cuadrático es el mismo, es decir,

$$dx = \frac{h_E}{2} d\xi = j d\xi, \quad (2.49)$$

donde  $j = h_E/2$ .



**Figura 2.10** Funciones de forma para un elemento finito isoparamétrico cuadrático de tres nodos.

**Ejemplo 2.6.** Escribir las matrices elementales del Ejemplo 1.5 para un elemento isoparamétrico cuadrático de tres nodos.

**Matriz de funciones de forma:**

$$\mathbf{N}_E = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) & N_3(\xi) \end{bmatrix}.$$

**Matriz de deformación:**

$$\mathbf{B}_E = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} & \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} & \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} \end{bmatrix}.$$

**Matriz de rigidez:**

$$\mathbf{K}_E = \int_E \mathbf{B}_E^\top(x) \mathbf{B}_E(x) dx = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_E(\xi)^\top \mathbf{B}_E(\xi) j d\xi$$

**Vector de fuerzas nodales:**

$$\mathbf{f}_E = \int_E \mathbf{N}_E^\top(x) dx = \int_{-1}^1 \mathbf{N}_E^\top(\xi) j d\xi.$$

### Integración numérica de Gauss

La integración numérica de Gauss en una dimensión (o *cuadratura de Gauss*) consiste en evaluar la integral

$$I = \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \quad (2.50)$$

mediante la sumatoria

$$I = \sum_{k=1}^{n_p} F(\xi_k) W_k, \quad (2.51)$$

donde  $\xi_k$  es la coordenada normalizada del punto de Gauss  $k$  y  $W_k$  es su peso asociado a la cuadratura;  $n_p$  es la cantidad de puntos de Gauss. Las tres primeras cuadraturas de Gauss (puntos y pesos) se muestran en la Tabla 1.2. En general, una cuadratura de Gauss de  $n_p$  puntos puede integrar exactamente un polinomio hasta de orden  $2n_p - 1$ .

**TABLA 2.2**

Puntos y pesos de la cuadratura de Gauss.

$n_p$	$\xi_k$	$W_k$
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1.0
3	$\pm 0.7745966692$ 0.0	0.5555555556 0.8888888889

**Ejemplo 2.7.** Calcular la siguiente integral utilizando cuadratura de Gauss:

$$I = \int_0^1 x^2 dx.$$

La integral se puede resolver analíticamente y su valor exacto es  $I = \frac{1}{3}$ . Para integrarla con cuadratura de Gauss es necesario mapear la integral al dominio normalizado  $-1 \leq \xi \leq 1$ . Esto se puede hacer con la ayuda del mapeo isoparamétrico (1.42) como sigue:

$$x = N_1(\xi)x_{1E} + N_2(\xi)x_{2E} = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)0 + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)1 = \frac{1+\xi}{2}.$$

El Jacobiano del mapeo es  $j = dx/d\xi = 1/2$ , por lo que la integral mapeada queda como

$$I = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 \frac{dx}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{(1+\xi)^2}{4} \frac{1}{2} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{(1+\xi)^2}{8} d\xi.$$



Comenzamos con la cuadratura de 1 punto de Gauss. Según la Tabla 1.2 esta cuadratura es  $(\xi_1, W_1) = (0.0, 2.0)$ , por lo que la integral numérica queda como

$$I = F(\xi_1)W_1 = \frac{(1 + 0.0)^2}{8} 2.0 = \frac{1}{8} 2.0 = \frac{1}{4}.$$

En este caso, la integración numérica no es exacta porque la cuadratura de 1 punto de Gauss solo puede integrar exactamente un polinomio hasta de orden  $2 \times 1 - 1 = 1$ .

Probamos la cuadratura de 2 puntos de Gauss. Según la Tabla 1.2 esta cuadratura es  $(\xi_1, W_1) = (1/\sqrt{3}, 1.0)$  y  $(\xi_2, W_2) = (-1/\sqrt{3}, 1.0)$ , por lo que la integral se evalúa como

$$\begin{aligned} I &= F(\xi_1)W_1 + F(\xi_2)W_2 \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 1.0 + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 1.0 \\ &= \frac{1}{8} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{1}{8} \left[2 + \frac{2}{3}\right] \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

obteniéndose el valor exacto de la integral, ya que la cuadratura de 2 puntos de Gauss puede integrar exactamente un polinomio hasta de orden  $2 \times 2 - 1 = 3$ .

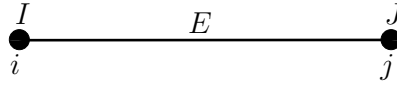
### 2.4.2. Algoritmo para ensamble de matrices y vectores elementales

En esta sección se presenta el algoritmo de ensamble de las matrices de rigidez y vectores de fuerzas nodales para elementos finitos lineales de dos nodos. No obstante, el algoritmo es el mismo para elementos finitos cuadráticos de tres nodos. El algoritmo a detallar es mucho más eficiente que el método de las matrices booleanas. Por lo mismo, es el algoritmo que en la práctica se utiliza para la implementación del MEF.

#### Matriz de rigidez y vector de fuerzas elementales

La Figura 1.11 muestra un elemento de lineal de dos nodos genérico, donde se utiliza la siguiente notación:

- $I, J$  : nodo  $I$  y nodo  $J$  en numeración local (elemental).
- $i, j$  : nodo  $i$  y nodo  $j$  en numeración global.
- $E$  : índice del elemento.



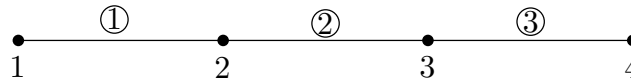
**Figura 2.11** Elemento lineal de dos nodos genérico.

Resulta conveniente definir una matriz y un vector elemental maestro para cada tipo de elemento en la malla. De este modo, cada vez que se requiera formar una matriz elemental para un determinado tipo de elemento, utilizamos la matriz y vector maestro. En el elemento lineal de dos nodos en consideración posee un grado de libertad por nodo. Por lo tanto, el tamaño de la matriz de rigidez es de  $(2 \times 2)$ , mientras que el tamaño del vector de fuerzas nodales es de  $(2 \times 1)$ . Entonces, definimos la matriz y vector maestro del elemento lineal de dos nodos (matriz y vector elemental, respectivamente), como sigue:

$$\mathbf{K}_E = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_E = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

#### Matriz de rigidez y vector de fuerzas globales

Para proceder con el ensamble de matrices y vectores elementales en sus respectivos globales, es necesario establecer una relación entre la numeración local y la numeración global de nodos. Con este fin, consideremos la malla de elementos finitos que se muestra en la (1.12), donde los números inscritos en círculos indican los elementos de la malla y los números restantes indican la numeración global de nodos. La relación entre numeración



**Figura 2.12** Malla de elementos lineales de dos nodos para ejemplificar el algoritmo de ensamble.

local y global de nodos se obtiene por medio de la conectividad del elemento. Para la malla de la (1.12), la conectividad está dada por la *matriz de conectividades* que se muestra en la Tabla 1.3.

Utilizando esta matriz de conectividades se puede consultar la numeración global correspondiente para cada nodo local. Por ejemplo, para el elemento 2 su nodo local 1 (NODO 1) corresponde al nodo global 2 de la malla, y su nodo local 2 (NODO 2) corresponde al nodo global 3 de la malla. Como cada nodo del elemento posee un grado de libertad, esta numeración global está directamente relacionada con las posiciones en las filas y columnas de la matriz global. Utilizaremos esta relación directa para ensamblar, por lo que para cada elemento de la malla, la entrada  $\mathbf{K}_{IJ}$  de su matriz de rigidez elemental se ensambla en la posición (NODO  $I$ , NODO  $J$ ) de la matriz global, donde NODO  $I$  y NODO  $J$  se

**TABLA 2.3**

Matriz de conectividades para la malla de la Figura 1.12.

Elemento	NODO 1	NODO 2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

obtienen de la matriz de conectividades. Por ejemplo, para el elemento 2 de la malla en consideración, su matriz de rigidez elemental se ensambla ( $\rightarrow$  representando la operación de ensamble) en las siguientes posiciones de la matriz de rigidez global:

$$\mathbf{K}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} (2,2)_2 & (2,3)_2 \\ (3,2)_2 & (3,3)_2 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

donde  $(i,j)_2$  es la entrada  $(i,j)$  de la matriz de rigidez global que fue aportada por el elemento 2. De manera similar, el vector de fuerzas nodales del elemento 2 se ensambla en el vector global como sigue:

$$\mathbf{f}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} (2)_2 \\ (3)_2 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

donde  $(i)_2$  es la  $i$ -ésima entrada del vector de fuerzas global que fue aportada por el elemento 2.

Dado que dos elementos contiguos comparten un nodo, se esperan traslapes de entradas en el proceso de ensamble. Las entradas traslapantes se deben sumar. Por ejemplo, consideremos el elemento 3. El ensamble de este elemento es:

$$\mathbf{K}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} (3,3)_3 & (3,4)_3 \\ (4,3)_3 & (4,4)_3 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{f}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} (3)_3 \\ (4)_3 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Existe un traslape entre el elemento 2 y el elemento 3 en la entrada  $(3,3)$  de la matriz global, y en la fila  $(3)$  del vector global. Por lo tanto, en la entrada  $(3,3)$  de la matriz global se realiza la siguiente adición:

$$(3,3) = (3,3)_2 + (3,3)_3, \quad (2.57)$$

donde el primer término del lado derecho es la contribución del elemento 2, y el segundo es la contribución del elemento 3. Similarmente para el vector de fuerzas global:

$$\mathbf{(3)} = \mathbf{(3)}_2 + \mathbf{(3)}_3, \quad (2.58)$$

donde el primer término del lado derecho de es la contribución del elemento 2, y el segundo es la contribución del elemento 3.

### Aplicación de las condiciones de contorno de Neumann

La aplicación de las condiciones de contorno naturales o de Neumann, se lleva a cabo, en la práctica, después de que el vector de fuerzas global ha sido ensamblado, ya que solo unos pocos elementos de la malla tienen esta condición en sus vectores de fuerzas nodales elementales (ver Ejemplo 1.4). Entonces, primero se ensamblan todos los vectores de fuerzas nodales elementales ignorando la condición de Neumann. Al final del proceso, se inserta la condición de Neumann directamente en el vector de fuerzas global. A modo ilustrativo, para el vector de fuerzas nodales del elemento 3 del Ejemplo 1.4, que usa una malla de cuatro nodos como la de la Figura 1.12, la aplicación de su condición de Neumann, cuyo valor es 1 en el nodo 4, se hace directamente en el nodo 4. Es decir, el vector de fuerzas global queda como:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} (1)_1 \\ (2)_1 + (2)_2 \\ (3)_2 + (3)_3 \\ (4)_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

### Imposición de las condiciones de contorno de Dirichlet

Supongamos que un dominio unidimensional ha sido discretizado con  $n - 1$  elementos, por lo que la malla posee  $n$  nodos. Además, supongamos que el grado de libertad asociado al nodo global 1 tiene una condición esencial o de Dirichlet, la que designamos como  $\bar{u}$ . Como esta condición debe ser parte de la solución del sistema global de ecuaciones, el sistema se arregla para satisfacer esta condición, quedando del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2n} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ f_2 - K_{21}\bar{u} \\ f_3 - K_{31}\bar{u} \\ \vdots \\ f_n - K_{n1}\bar{u} \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

el cual se encuentra listo para ser resuelto. El vector  $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \end{bmatrix}^T$  en (1.60) contiene los grados de libertad (que son las incógnitas) correspondientes a los nodos de la malla en

la numeración global. En la implementación computacional es útil definir dos arreglos que nos permiten imponer las condiciones de contorno esenciales: un arreglo (que llamaremos `ebcdof`) que contiene los índices de las filas del vector de grados de libertad donde existan condiciones de contorno de Dirichlet, y un arreglo (al que llamaremos `ebcval`) que contiene los valores de esas condiciones. Para el sistema (1.60), estos vectores quedan definidos del siguiente modo: `ebcdof` = [1] y `ebcval` = [ $\bar{u}$ ].

De manera similar se puede modificar el sistema para incluir otras condiciones esenciales. A modo de ejemplo, supongamos que para el problema en cuestión existe una condición  $\hat{u}$  en el grado de libertad del tercer nodo. El nuevo sistema de ecuaciones queda del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & \cdots & K_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{n2} & 0 & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ f_2 - K_{21}\bar{u} - K_{23}\hat{u} \\ \hat{u} \\ \vdots \\ f_n - K_{n1}\bar{u} - K_{n3}\hat{u} \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

y la información de las condiciones de contorno esenciales las almacenamos en los vectores `ebcdof` = [ 1 3 ] y `ebcval` = [ $\bar{u}$   $\hat{u}$ ].

### 2.4.3. Implementación computacional

A continuación, se presenta la implementación computacional de lo abordado en la Sección 1.4.2. La implementación consiste en los siguientes pasos:

- (1) Generación de la malla de elementos finitos.
- (2) Construcción del arreglo de conectividades.
- (3) Ensamble de matrices y vectores elementales.
- (4) Aplicación de las condiciones de contorno de Neumann.
- (5) Imposición de condiciones de contorno de Dirichlet.
- (6) Resolución del sistema matricial de ecuaciones lineales.

Los pasos más relevantes se detallan a continuación.

#### Implementación del ensamble de las matrices de rigidez elementales

Definiendo `ndofs` como el número total de grados de libertad de la malla, `neldofs` como el número de grados de libertad por elemento, `numel` como el número total de elementos de la malla, `he` como el largo del elemento, `np` como el número de puntos de Gauss, `xp`

como la coordenada de un punto  $p$  de integración de Gauss y  $wp$  su respectivo peso de Gauss, un arreglo `connect` que extrae la numeración global de nodos desde la matriz de conectividades,  $Kg$  como la matriz de rigidez global, y  $Ke$  como la matriz de rigidez elemental, se puede resumir el algoritmo de ensamble de las matrices de rigidez elementales provenientes de la forma débil (1.5), como se muestra en el Listado 1.1.

---

```

1 Kg = zeros(ndofs,ndofs);
2 % Puntos y pesos de Gauss
3 xp = gausspoints(np); % (np X 1) array
4 wp = gaussweights(np); % (np X 1) array
5 % Loop sobre elementos (e = 1,..., numel)
6 for e = 1:numel
7     Ke = zeros(neldofs,neldofs);
8     for p =1:np % Loop sobre puntos de Gauss (p = 1,...,np)
9         xpp = xp(p);
10        wpp = wp(p);
11        Ke = Ke + (a*Be'(xpp)*Be(xpp)*he/2 + b*Ne'(xpp)*Ne(xpp)*he/2)*wpp;
12    end
13    % el siguiente loop supone 1 grado de libertad por nodo,
14    % por lo que la cantidad de grados de libertad del elemento
15    % coincide con la cantidad de nodos del elemento
16    for Node_I = 1:2 % Loop sobre filas de Ke (Node_I = 1,2)
17        for Node_J = 1:2 % Loop sobre columnas de Ke (Node_J = 1,2)
18            g_row = connect(Node_I); % fila global
19            l_row = Node_I;          % fila local
20            g_col = connect(Node_J); % columna global
21            l_col = Node_J;          % columna local
22            Kg(g_row,g_col) = Kg(g_row,g_col) + Ke(l_row,l_col);
23        end
24    end
25 end

```

---

**Listado 2.1** Implementación en MATLAB del ensamble de las matrices de rigidez elementales. La implementación se presenta solo con fines didácticos por lo que no está optimizada.

### Implementación del ensamble de vectores de fuerzas nodales elementales

El ensamble de los vectores de fuerzas nodales elementales se realiza de manera similar al de las matrices de rigidez elementales. Utilizando la misma notación que para el ensamble de matrices de rigidez elemental, con la obvia definición de  $Fg$  como el vector de fuerzas nodales global y de  $Fe$  como el vector de fuerzas nodales elemental, se puede resumir el algoritmo de ensamble de los vectores de fuerzas nodales elemental provenientes de la forma débil (1.5), como se muestra en el Listado 1.2.

---

```

1 Fg = zeros(ndofs,1);
2 % Puntos y pesos de Gauss
3 xp = gausspoints(np); % (np X 1) array
4 wp = gaussweights(np); % (np X 1) array
5 % Loop sobre elementos (e = 1,..., numel)
6 for e = 1:numel
7     Fe = zeros(neldofs,1);
8     for p =1:np % Loop sobre puntos de Gauss (p = 1,...,np)

```

```

9     xpp = xp(p);
10    wpp = wp(p);
11    Fe = Fe + g*Ne'(xpp)*he/2*wpp;
12    end
13    % el siguiente loop supone 1 grado de libertad por nodo,
14    % por lo que la cantidad de grados de libertad del elemento
15    % coincide con la cantidad de nodos del elemento
16    for Node_I = 1:2 % Loop sobre filas de Ke (Node_I = 1,2)
17        g_row = connect(Node_I); % fila global
18        l_row = Node_I; % fila local
19        Fg(g_row) = Fg(g_row) + Fe(l_row);
20    end
21 end

```

**Listado 2.2** Implementación en MATLAB del ensamble de los vectores de fuerzas nodales elementales. La implementación se presenta solo con fines didácticos por lo que no está optimizada.

### Implementación de la aplicación de las condiciones de contorno de Neumann

Las condiciones de contorno de Neumann se aplican directamente en las filas del vector de fuerzas global ensamblado que correspondan a los grados de libertad con condiciones de contorno de Neumann asociadas. Esto se lleva a cabo sumando estas condiciones a las entradas existentes de las filas que correspondan de manera similar a como se indicó en (1.59).

### Implementación de la imposición de condiciones de contorno de Dirichlet

Finalmente, mediante el uso de los arreglos `ebcdof` y `ebcval`, y después de haber aplicado las condiciones de contorno de Neumann, realizamos la imposición de condiciones de contorno esenciales como muestra en el Listado 1.3, donde `numnod` es el número total de nodos en la malla.

```

1  for i = 1:length(ebcdof)
2      % se supone 1 grado de libertad por nodo,
3      % por lo que la numeración global del nodo
4      % coincide con la numeración global del grado de libertad
5      n = ebcdof(i);
6      for j = 1:numnod
7          if (isempty(find(ebcdof == j))) % grado de libertad j no está presente en ebcdof
8              Fg(j) = Fg(j) - Kg(j,n)*ebcval(i);
9          end
10     end
11     Kg(n,:) = 0.0;
12     Kg(:,n) = 0.0;
13     Kg(n,n) = 1.0;
14     Fg(n) = ebcval(i);
15 end

```

**Listado 2.3** Implementación en MATLAB de la imposición de condiciones de contorno de Dirichlet.

#### 2.4.4. Postprocesamiento de datos

El postprocesamiento de datos corresponde a todos los cálculos que se hagan a partir de la solución de la variable principal. Esto incluye los ploteos de datos posteriores a la solución del sistema matricial de ecuaciones. Desde luego, el ploteo de la variable principal también es parte del postproceso.

##### Postprocesamiento de la variable principal

Si se desea plotear la variable  $u$  en un punto  $x_p$  en el interior de un elemento, esto se lleva a cabo utilizando la discretización  $u_E^h$  en forma matricial,

$$u_E^h(x_p) = \mathbf{N}_E(x_p)\mathbf{u}_E, \quad (2.62)$$

que fue introducida en el Ejemplo 1.4, y donde los valores de  $\mathbf{u}_E$  se obtienen del vector global de soluciones  $\mathbf{u}$ . La variable  $u$  se puede plotear a lo largo del elemento evaluando (1.62) en varios puntos en el interior del elemento.

##### Postprocesamiento de la variable secundaria

Si se desea plotear la variable  $\frac{du(x)}{dx}$  en un punto  $x_p$  en el interior de un elemento, esto se lleva a cabo utilizando la discretización  $\frac{du_E^h(x)}{dx}$  en forma matricial,

$$\frac{du_E^h(x_p)}{dx} = \mathbf{B}_E(x_p)\mathbf{u}_E, \quad (2.63)$$

que fue introducida en el Ejemplo 1.4, y donde los valores de  $\mathbf{u}_E$  se obtienen del vector global de soluciones  $\mathbf{u}$ . La variable  $\frac{du(x)}{dx}$  se puede plotear a lo largo del elemento evaluando (1.63) en varios puntos en el interior del elemento.

#### 2.4.5. Error Numérico y Convergencia

Para la forma débil proveniente de una ecuación diferencial de segundo orden, utilizaremos dos tipos de medida del error numérico. Una para medir el error en la variable  $u$ , llamada norma  $L^2$ , y otra para medir el error en la variable  $u' \equiv du/dx$ , llamada seminorma  $H^1$ .

Sea  $u(x)$  la solución exacta y  $u^h(x)$  la solución global por elementos finitos. El error punto a punto es  $e = u(x) - u^h(x)$ . Para obtener un error representativo de todo el dominio, debemos evaluar el error  $e$  punto a punto a lo largo del dominio y sumarlos. Sin embargo, en la suma podrían cancelarse errores. Para evitar esta situación, el error lo evaluamos por medio de la norma  $L^2$ . La norma  $L^2$  del error está dada por:

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} = \|u(x) - u^h(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} [u(x) - u^h(x)]^2 dx \right)^{1/2}, \quad (2.64)$$



la que se puede hacer relativa con respecto a la norma de la solución exacta:

$$\frac{\|e\|_{L^2(\Omega)}}{\|u(x)\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|u(x) - u^h(x)\|_{L^2(\Omega)}}{\|u(x)\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\left(\int_{\Omega} [u(x) - u^h(x)]^2 dx\right)^{1/2}}{\left(\int_{\Omega} u^2(x) dx\right)^{1/2}}. \quad (2.65)$$

El error relativo en la norma  $L^2$  se puede interpretar como un error porcentual. Si este error es del orden de 0.02, entonces el error en la variable  $u$  es del 2%.

Similarmente, se puede evaluar el error en las derivadas mediante la seminorma  $H^1$ . La seminorma  $H^1$  del error está dada por:

$$\|e\|_{H^1(\Omega)} = \|u(x) - u^h(x)\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} [u'(x) - (u^h(x))']^2 dx\right)^{1/2}. \quad (2.66)$$

Esta norma se puede hacer relativa con respecto a la norma de la derivada exacta, lo que resulta en

$$\frac{\|e\|_{H^1(\Omega)}}{\|u(x)\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{\|u(x) - u^h(x)\|_{H^1(\Omega)}}{\|u(x)\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{\left(\int_{\Omega} [u'(x) - (u^h(x))']^2 dx\right)^{1/2}}{\left(\int_{\Omega} (u'(x))^2 dx\right)^{1/2}}. \quad (2.67)$$

Las tasas de convergencia teóricas con respecto al refinamiento de la malla,  $k_1$  y  $k_2$  de la norma  $L^2$  y seminorma  $H^1$ , respectivamente, se obtienen de [?]:

$$\begin{aligned} \|u(x) - u^h(x)\|_{L^2(\Omega)} &= c_1 h^{k_1}, \\ \|u(x) - u^h(x)\|_{H^1(\Omega)} &= c_2 h^{k_2}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

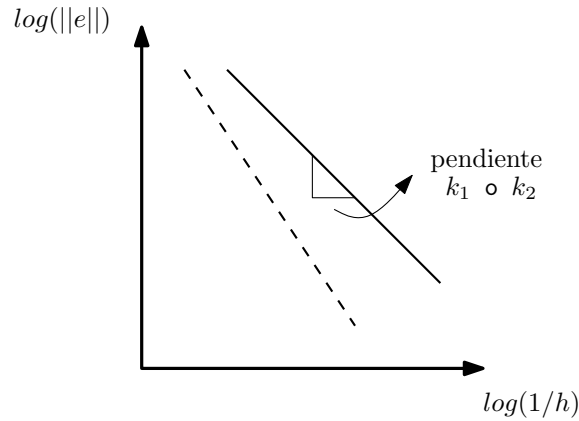
donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes que dependen del problema y de la malla. Al graficar estas normas con respecto al tamaño característico  $h$  de la malla en un gráfico log-log, se obtienen unas pendientes que son los valores de  $k_1$  y  $k_2$ . La Figura 1.13 muestra esquemáticamente este gráfico. Los valores de  $k_1$  y  $k_2$  no cambian si se hace el mismo gráfico usando las normas relativas. Para elementos lineales, los valores teóricos de las tasas de convergencia son  $k_1 = 2$  y  $k_2 = 1$ . Para elementos cuadráticos, estos valores son  $k_1 = 3$  y  $k_2 = 2$ . En general,  $k_1 = p + 1$  y  $k_2 = p$ , donde  $p$  es el orden del elemento.

La evaluación de las normas (1.65) y (1.67) en el contexto del MEF, se realiza integrando numéricamente sobre los elementos de la malla, respectivamente, como sigue:

$$\frac{\left(\int_{\Omega} [u(x) - u^h(x)]^2 dx\right)^{1/2}}{\left(\int_{\Omega} u^2(x) dx\right)^{1/2}} = \frac{\left(\sum_E \left(\sum_{k=1}^{n_p} [u(\xi_k) - \mathbf{N}_E(\xi_k) \mathbf{u}_E]^2 W_k j\right)\right)^{1/2}}{\left(\sum_E \left(\sum_{k=1}^{n_p} u^2(\xi_k) W_k j\right)\right)^{1/2}}, \quad (2.69)$$

$$\frac{\left(\int_{\Omega} [u'(x) - (u^h(x))']^2 dx\right)^{1/2}}{\left(\int_{\Omega} (u'(x))^2 dx\right)^{1/2}} = \frac{\left(\sum_E \left(\sum_{k=1}^{n_p} [u'(\xi_k) - \mathbf{B}_E(\xi_k) \mathbf{u}_E]^2 W_k j\right)\right)^{1/2}}{\left(\sum_E \left(\sum_{k=1}^{n_p} [u'(\xi_k)]^2 W_k j\right)\right)^{1/2}}, \quad (2.70)$$

donde  $j$  es el Jacobiano del mapeo isoparamétrico.



**Figura 2.13** Tasas de convergencia en la norma  $L^2$  y seminorma  $H^1$ .

---

## Problemas

**Problema 2.1.** Encontrar la expresión equivalente de la siguiente integral usando integración por partes:

$$\int_1^2 x^2 v(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} dx,$$

donde  $\frac{du(x)}{dx}$  y  $\frac{dv(x)}{dx}$  son funciones continuas en el intervalo  $1 \leq x \leq 2$ .

**Problema 2.2.** Suponer que en el Problema 1.1  $u(x) = v(x) = x^2$  y resolver la integral.

**Problema 2.3.** Suponer que en el Problema 1.1 las funciones son:

$$u(x) = v(x) = \begin{cases} x & 1 \leq x < 1.5 \\ -2x & 1.5 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

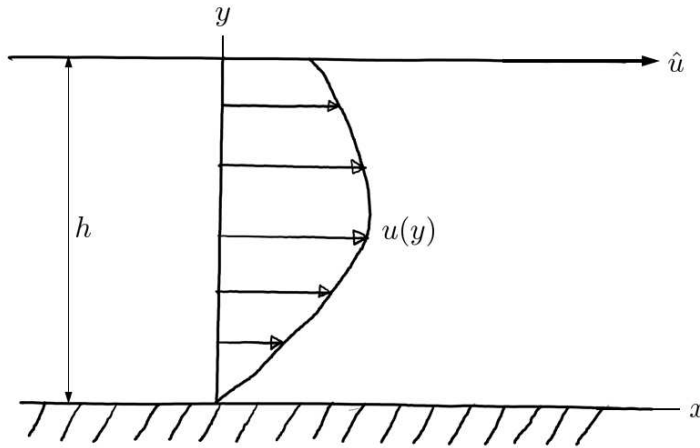
¿Se puede resolver la integral usando integración por partes?

**Problema 2.4.** La Figura 1.14 muestra un flujo de fluido viscoso entre dos placas paralelas. El problema de valor de contorno que gobierna este problema es el siguiente:

$$\frac{d}{dy} \left( \mu(y) \frac{du(y)}{dy} \right) - \frac{dP}{dx} = 0; \quad 0 < y < h,$$

$$u(0) = 0; \quad u(h) = \hat{u},$$

donde  $h$  es la distancia entre las placas y  $\frac{dP}{dx}$  es la caída de presión. Desarrollar la forma débil para este problema.



**Figura 2.14** Perfil de velocidad de un flujo de fluido viscoso entre dos placas paralelas.

**Problema 2.5.** Desarrollar la forma débil para el siguiente problema de valor de contorno:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{du(x)}{dx} \right] = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

**Problema 2.6.** Desarrollar la forma débil para el siguiente problema de valor de contorno:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1+2x^2) \frac{du(x)}{dx} \right] - u(x) + x^2 = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du(1)}{dx} = 2.$$

**Problema 2.7.** Desarrollar la forma débil para el siguiente problema de valor de contorno:

$$x^2 \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + 2x \frac{du(x)}{dx} + x = 1; \quad 1 < x < 2,$$

$$u(1) = 2; \quad \frac{du(2)}{dx} + 2u(2) = 5.$$

**Problema 2.8.** Considerar una barra axial uniforme ( $E_Y A$  constante) fija en un extremo y sometida a una carga puntual  $P$  estática en el otro extremo. La barra también está sometida a una carga axial  $q(x)$  que varía linealmente con la posición según la relación  $q(x) = cx$ , donde  $c$  es una constante dada. El problema está descrito por el siguiente problema de valor de contorno:

$$E_Y A \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + cx = 0, \quad 0 < x < L;$$

$$u(0) = 0, \quad E_Y A \frac{du(L)}{dx} = P.$$

Desarrollar lo siguiente:

- Encontrar el funcional cuadrático  $\Pi[u]$ .
- Resolver el problema utilizando el método de Rayleigh-Ritz con la aproximación lineal  $u^N(x) = \phi_0(x) + c_1 x$ .
- Resolver el problema utilizando el método de Rayleigh-Ritz con la aproximación cuadrática  $u^N(x) = \phi_0(x) + c_1 x + c_2 x^2$ .
- Resolver el problema utilizando el método de Rayleigh-Ritz con la aproximación cúbica  $u^N(x) = \phi_0(x) + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ .

**Problema 2.9.** Obtener la matriz de rigidez elemental y el vector de fuerzas nodales elemental para un elemento lineal de dos nodos para un problema gobernado por el siguiente problema de valor de contorno:

$$-a \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + cu - f = 0; \quad 0 < x < L;$$

$$u(0) = 0, \quad -a \frac{du(L)}{dx} = 2.$$

**Problema 2.10.** Obtener la matriz de rigidez elemental y el vector de fuerzas nodales elemental para un elemento cuadrático de dos nodos para el problema de valor de contorno del Problema 1.9.

**Problema 2.11.** El desplazamiento y la distribución de temperatura en una barra uniforme ( $E_Y A$  constante) maciza, de sección circular de radio  $r$ , y de largo  $L$  está gobernado por el siguiente problema de valor de contorno acoplado:

$$\begin{aligned} -E_Y A \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{h A_c}{L} \frac{dT(x)}{dx} &= f, \quad 0 < x < L; \quad (i) \\ -k A \frac{d^2 T(x)}{dx^2} &= g A, \quad 0 < x < L; \quad (ii) \\ u(0) = 0, \quad -E_Y A \frac{du(L)}{dx} &= 0, \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = 0, \end{aligned}$$

donde  $A$  es el área seccional de la barra, y  $A_c$  es el área de convección de la barra, que se calcula como el perímetro de la sección transversal de la barra multiplicado por el largo  $L$  de la barra. Las constantes tienen los siguientes valores:  $E_Y = 2 \times 10^5$  MPa (módulo de Young),  $r = 2$  mm (radio),  $L = 100$  mm (largo),  $k = 385$  mW/(mm °C) (conductividad térmica),  $h = 25 \times 10^{-3}$  mW/(mm<sup>2</sup> °C) (coeficiente de convección),  $f = 1 \times 10^{-3}$  N/mm,  $g = 1 \times 10^{-6}$  mW/mm<sup>3</sup>,  $T_0 = 20$  °C.

- Desarrollar la forma débil del problema acoplado usando el método de residuos ponderados. Utilizar una función de peso  $v$  en (i) y una función de peso  $w$  en (ii).
- Implementar un programa de elementos finitos para resolver la forma débil anterior usando elementos lineales de dos nodos. Acoplar la matriz de rigidez elemental y el vector de fuerzas nodales elemental de modo que los grados de libertad del elemento lineal queden ordenados como  $\mathbf{u}_E = \begin{bmatrix} u_1 & T_1 & u_2 & T_2 \end{bmatrix}^T$ .
- Resolver el problema anterior con 10 elementos finitos lineales de dos nodos equiespaciados. Plotear la solución de  $u(x)$ ,  $\sigma(x) = E_Y \frac{du(x)}{dx}$ ,  $T(x)$  y  $q(x) = -k \frac{dT(x)}{dx}$  para  $0 \leq x \leq L$ .
- Se sabe que para  $f = g = 0$  la solución exacta en la barra es:

$$u(x) = \frac{h A_c / L T_0}{2 E_Y A L} (2 L x - x^2), \quad T(x) = T_0 \left( 1 - \frac{x}{L} \right).$$

Usar esta solución exacta para estudiar el error numérico en la norma  $L^2$  y la seminorma  $H^1$ . Plotear ambas normas en un gráfico log-log en función del tamaño  $h_E$  del elemento y calcular las pendientes de las rectas resultantes. Para plotear las normas, utilizar seis valores de  $h_E$ , uno por malla, para mallas de 2, 8, 16, 32, 64 y 128 elementos lineales de dos nodos. Comparar con las pendientes teóricas.

---

## Referencias

- [1] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- [2] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc, Mineola, NY, 2000.
- [3] J. N. Reddy. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, NY, third edition, 2006.
- [4] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, sixth edition, 2005.
- [5] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and P. Nithiarasu. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, sixth edition, 2005.
- [6] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, sixth edition, 2005.