1

Fundamentos Matemáticos

Alejandro Ortiz-Bernardin
Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Av. Beauchef 851, Santiago 8370456, Chile

CONTENIDO

El cálculo es la herramienta matemática fundamental que ha permitido a las técnicas numéricas como el método del elemento finito poder existir. Este capítulo está destinado a resumir los ingredientes necesarios del cálculo que se utilizan en este texto.

1.1. Teorema fundamental del cálculo

Uno de los teoremas más importantes que se presentan en los primeros cursos de cálculo es el teorema fundamental del cálculo. Este teorema dice que la integral definida de una función $f(x)$ entre dos puntos, a y b, se obtiene utilizando la antiderivada $F(x)$ de la función $f(x)$ y evaluando la diferencia $F(b) - F(a)$, esto es,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1.1}$$

Para que este teorema sea aplicable, la función $F(x)$ debe ser continua en el intervalo $a \leq x \leq b$.

https://camlab.cl/teaching/books/mcms/

1.2. Integración por partes

Cuando se derivan las ecuaciones del método del elemento finito y otros métodos numéricos similares, es necesario evaluar integrales que tienen la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Este tipo de integral puede ser evaluada mediante un procedimiento llamado integración por partes.

El primer paso en este procedimiento consiste en tomar la derivada del producto entre $F(x)$ (la antiderivada de $f(x)$) y la función $g(x)$ como sigue:

$$\frac{d}{dx}[F(x)g(x)] = f(x)g(x) + F(x)\frac{dg(x)}{dx}, \tag{1.3}$$

donde se ha utilizado la regla de la cadena. Luego, despejando obtenemos la siguiente relación:

$$f(x)g(x) = \frac{d}{dx}[F(x)g(x)] - F(x)\frac{dg(x)}{dx}. \tag{1.4}$$

El segundo paso consiste en reemplazar $f(x)g(x)$ en (1.2) con el lado derecho de (1.4), obteniéndose lo siguiente:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}[F(x)g(x)]\,dx - \int_a^b F(x)\frac{dg(x)}{dx}\,dx. \tag{1.5}$$

En seguida, se aplica el teorema fundamental del cálculo dado en (1.1) a la primera integral del lado derecho de (1.5) resultando en

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[F(x)g(x)]\,dx = [F(x)g(x)]\Big|_a^b = F(b)g(b) - F(a)g(a), \tag{1.6}$$

donde se ha utilizado que la antiderivada de $\frac{d}{dx}[F(x)g(x)]$ es simplemente $F(x)g(x)$. Finalmente, combinando (1.5) con (1.6) da el siguiente resultado:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = -\int_a^b F(x)\frac{dg(x)}{dx}\,dx + \Big\{F(b)g(b) - F(a)g(a)\Big\}. \tag{1.7}$$

La identidad (1.7) se utiliza en el desarrollo de la forma débil de alguna ecuación diferencial de interés. Esto se verá con cierto detalle en el Capítulo 2.

Ejemplo 1.1. Encontrar la expresión equivalente de la siguiente integral usando integración por partes:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{du(x)}{dx}\right) v(x)\,dx,$$

donde $c(x)\frac{du(x)}{dx}$ y $v(x)$ son funciones continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$.

De la ecuación anterior definimos $f(x) = \frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{du(x)}{dx}\right)$ y $g(x) = v(x)$. De la definición de $f(x)$ es inmediato reconocer que su antiderivada es $F(x) = c(x)\frac{du(x)}{dx}$. Por lo tanto,

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{du(x)}{dx}\right)v(x)\,dx = \\ -\int_a^b c(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}\,dx + \left\{c(b)\frac{du(b)}{dx}v(b) - c(a)\frac{du(a)}{dx}v(a)\right\}.$$