Método del Elemento Virtual

Alejandro Ortiz-Bernardin
Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Av. Beauchef 851, Santiago 8370456, Chile

CONTENIDO

1. Introducción

Cuando un problema de valor de contorno, como el de la elasticidad lineal estática, se resuelve numéricamente usando la formulación débil de Galerkin, los desplazamientos de prueba y de peso son reemplazados por sus representaciones discretas, adoptando la siguiente forma:

$$\boldsymbol{v}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{N} \phi_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_a, \tag{1}$$

donde $\phi_a(\boldsymbol{x})$ son las funciones de base nodal, $\boldsymbol{v}_a = [v_{1a} \quad v_{2a}]^\mathsf{T}$ son los desplazamientos nodales en el sistema bidimensional de coordenadas Cartersianas y N es el número de nodos que define un elemento.

En este capítulo solo consideraremos funciones de base que extienden el espacio de funciones de grado 1 (funciones lineales o afines), es decir, la aproximación mediante estas funciones de base es lineal.

Es pertinente mencionar que la gran mayoría de las funciones de base disponibles para construir una aproximación lineal, por ejemplo, funciones bilineales de Lagrange [19], funciones MLS lineales [10] y funciones maxent lineales [1], presentan términos no polinomiales o de orden superior —incluso las funciones de base MLS y maxent son funciones racionales—, por lo tanto, $\boldsymbol{v}^h(\boldsymbol{x})$ podría pertenecer a un espacio levemente más amplio que el de las funciones afines y al cual denotaremos por $\mathcal{W}$. Los términos adicionales no polinomiales o de orden superior que estén presentes en la aproximación lineal podrían potenciar la aparición de errores en la integración de la matriz de rigidez, llevando a problemas de estabilidad que afectarán la convergencia del método de aproximación. Este es el caso del método del elemento finito poligonal/poliédrico [17, 27, 28], los métodos sin malla Galerkianos [3, 4, 12–16, 21–24] y la integración reducida en el elemento finito cuadrilátero bilineal [11].

El método del elemento virtual [5] (MEV) fue desarrollado para afrontar los problemas de integración numérica en elementos poligonales. En síntesis, el MEV consiste en la construcción de una representación algebraica (exacta) de la matriz de rigidez sin la evaluación explícita de funciones de base (las funciones de base son *virtuales*). A la matriz de rigidez construida de esta manera se le considera *computable*, lo que se contrapone a la matriz de rigidez *no computable* que requeriría la evaluación de las derivadas de las funciones de base en los puntos de cuadratura (puntos de integración) internos del elemento. En el MEV, la matriz de rigidez se descompone en dos partes: una matriz que garantiza la reproducción exacta de un campo de desplazamientos lineal (matriz de rigidez de *consistencia*) y una matriz de corrección que provee estabilidad (matriz de rigidez de *estabilidad*). Esta descomposición está formulada en el espíritu del teorema de equivalencia de Lax para esquemas de diferencias finitas (consistencia + estabilidad $\rightarrow$ convergencia) y es suficiente para garantizar que el método pase el test de la parcela [11]. Recientemente, la teoría del MEV fue utilizada para corregir errores de integración numérica en el método de elementos poligonales/poliédricos [8, 18, 20] y en métodos sin malla Galerkianos [25].

Algunas de las ventajas que posee el MEV sobre el tradicional método del elemento finito (MEF) son las siguientes:

- Abilidad para utilizar geometrías complicadas hechas de elementos de número arbitrario de lados no necesariamente convexos, e incluso con lados coplanares y nodos colapsantes, y todo esto manteniendo las mismas propiedades de aproximación del MEF.
- Posibilidad de formular aproximaciones de orden superior con un orden arbitrario de regularidad (continuidad) global [9].
- Técnicas de refinamiento adaptativo de mallas se facilitan enormemente dado que nodos colgantes quedan automáticamente incluidos en el MEV por los elementos con lados coplanares [7].

2. Ecuaciones de gobierno para la elasticidad lineal estática

2.1. Forma fuerte

Consideremos un cuerpo elástico que ocupa el dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que está limitado por la superficie unidimensional Γ cuya normal apuntando hacia el exterior es $\boldsymbol{n}_\Gamma$. Se considera que el contorno admite las descomposiciones $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_f$ y $\emptyset = \Gamma_g \cap \Gamma_f$, donde Γ_g es el contorno esencial (o de Dirichlet) y Γ_f es el contorno natural (o de Neumann). El cierre del contorno del dominio es $\overline{\Omega} \equiv \Omega \cup \Gamma$. Sea $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo de los desplazamientos en el punto $\boldsymbol{x}$ del cuerpo elástico cuando este se somete a las tracciones externas $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}^2$ y las fuerzas de cuerpo $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Las condiciones de contorno esenciales (o de Dirichlet) impuestas son $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) : \Gamma_g \to \mathbb{R}^2$. El problema de valor de contorno que gobierna la elasticidad bidimensional lineal estática se lee como sigue: encontrar $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_g, \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_\Gamma = \boldsymbol{f} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_f, \tag{2c}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos de Cauchy dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} : \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}\right), \tag{3}$$

donde $\boldsymbol{D}$ es un tensor constante de cuarto orden que depende del material constituyente del cuerpo elástico.

2.2. Forma débil

Cuando se deriva la forma débil de Galerkin para el problema de elasticidad lineal usando el método de residuos ponderados, con $\boldsymbol{v}$ siendo la función de peso arbitraria, se obtiene la siguiente expresión para la forma bilineal:

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

El gradiente del campo de los desplazamientos puede ser descompuesto en sus partes simétrica ($\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{v}$) y antisimétrica ($\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{AS}}\boldsymbol{v}$), como sigue:

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{AS}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}), \tag{5}$$

donde

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v}\right) \tag{6}$$

es el tensor de deformaciones y

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{AS}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v}\right) \tag{7}$$

es el tensor gradiente antisimétrico que representa las rotaciones. Debido a que el tensor de esfuerzos es simétrico, su producto con el tensor gradiente antisimétrico es cero, lo que simplifica la forma bilineal a

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{8}$$

y lleva a la forma estándar de presentar la formulación débil: encontrar $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in V$ tal que

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \ell_b(\boldsymbol{v}) + \ell_f(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in W, \tag{9a}$$

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{9b}$$

$$\ell_b(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \ell_f(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_f} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}s, \tag{9c}$$

donde V and W son los siguientes espacios de desplazamientos de prueba y de peso, respectivamente:

$$V := \left\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{u} \in \mathcal{W}(\Omega) \subseteq [H^1(\Omega)]^2, \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \text{ sobre } \Gamma_g\right\}, \tag{10}$$

$$W := \left\{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{v} \in \mathcal{W}(\Omega) \subseteq [H^1(\Omega)]^2, \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sobre } \Gamma_g\right\}, \tag{11}$$

donde el espacio $\mathcal{W}(\Omega)$ incluye campos de desplazamientos lineales.

Las integrales que aparecen en la forma débil se evalúan sobre los elementos de una partición conocida como malla. Se denota por E a un elemento que tiene un área $|E|$ y un contorno ∂E que está formado por lados e de largo $|e|$. La partición (malla) formada por estos elementos se denota por $\mathcal{T}^h$, donde h es el máximo diámetro de cualquiera de los elementos dentro de la partición. El set formado por la unión de todos los lados de los elementos en esta partición se denota por $\mathcal{E}^h$, y el set formado por todos los lados elementales que se sitúan sobre Γ_f se denota por $\mathcal{E}_f^h$. Como ya ha sido mencionado, el espacio $\mathcal{W}(\Omega)$ presentará, en general, términos no polinomiales o de orden superior, y por lo tanto, la evaluación de las integrales de la forma débil se realizará usando cuadratura numérica. Particularmente, los términos no polinomiales son una fuente inevitable de error en la integración numérica de las integrales de la forma débil (la integración no será exacta), por lo que, de acuerdo a la definición dada en la Sección 1, la forma bilineal no será computable.

Reconociendo la necesidad de usar cuadratura numérica, las formas bilineal y lineales son reemplazadas por sus siguientes contrapartes aproximadas y dependientes de la malla:

$$a^h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{E\in\mathcal{T}^h} a_E^h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \quad \text{y} \quad \ell_b^h(\boldsymbol{v}) = \sum_{E\in\mathcal{T}^h} \ell_{b,E}^h(\boldsymbol{v}) \quad \text{y} \quad \ell_f^h(\boldsymbol{v}) = \sum_{e\in\mathcal{E}_f^h} \ell_{f,e}^h(\boldsymbol{v}). \tag{12}$$

La misma partición se usa para aproximar los campos de desplazamientos de prueba y de peso, lo que lleva a las siguientes formas bilineal y lineales discretas, respectivamente:

$$a^h(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v}^h) = \sum_{E\in\mathcal{T}^h} a_E^h(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v}^h), \quad \text{y} \quad \ell_b^h(\boldsymbol{v}^h) = \sum_{E\in\mathcal{T}^h} \ell_{b,E}^h(\boldsymbol{v}^h) \quad \text{y} \quad \ell_f^h(\boldsymbol{v}^h) = \sum_{e\in\mathcal{E}_f^h} \ell_{f,e}^h(\boldsymbol{v}^h), \tag{13}$$

y a los siguientes espacios discretos de prueba y de peso, respectivamente:

$$V^h := \left\{\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{u}^h \in \mathcal{W}(E) \subseteq [H^1(E)]^2 \ \forall E \in \mathcal{T}^h,\ \boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{g} \text{ sobre } \Gamma_g^h\right\}, \tag{14}$$

$$W^h := \left\{\boldsymbol{v}^h(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{v}^h \in \mathcal{W}(E) \subseteq [H^1(E)]^2 \ \forall E \in \mathcal{T}^h,\ \boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{0} \text{ sobre } \Gamma_g^h\right\}, \tag{15}$$

donde Γ_g^h es el contorno esencial discreto, $V^h \subset V$ y $W^h \subset W$.

En el método del elemento virtual, las formas bilineal y lineales discretas dadas en (13), que llevan a la matriz de rigidez y vector de fuerzas elementales, respectivamente, se construyen de modo tal que puedan ser computadas algebraicamente evitando así errores de cuadratura numérica que puedan causar problemas de estabilidad y de convergencia.

3. Método del elemento virtual

En el método del elemento finito bidimensional, la partición $\mathcal{T}^h$ se forma por triángulos o cuadriláteros. Ahora consideraremos la posibilidad de usar elementos con un número arbitrario de lados, es decir, elementos poligonales. La partición del dominio será realizada utilizando un generador de mallas de polígonos, y las matrices de rigidez y vectores de fuerza elementales para estos elementos, se construirán usando el marco teórico del método del elemento virtual (MEV).

3.1. Elemento poligonal

Particionemos el dominio Ω en elementos poligonales no traslapados y de lados rectos. El número de lados y nodos de un elemento poligonal se denota por N. La normal unitaria al contorno del elemento, apuntando hacia el exterior, se denota en coordenadas Cartesianas por $\boldsymbol{n} = [n_1 \quad n_2]^\mathsf{T}$. La Figura 1 presenta una representación esquemática de un elemento poligonal para $N = 5$, donde el lado e_a de largo $|e_a|$ y el lado e_{a-1} de largo $|e_{a-1}|$ son lados elementales que inciden en el nodo a, y $\boldsymbol{n}_a$ y $\boldsymbol{n}_{a-1}$ son las respectivas normales unitarias a estos lados apuntando hacia el exterior.

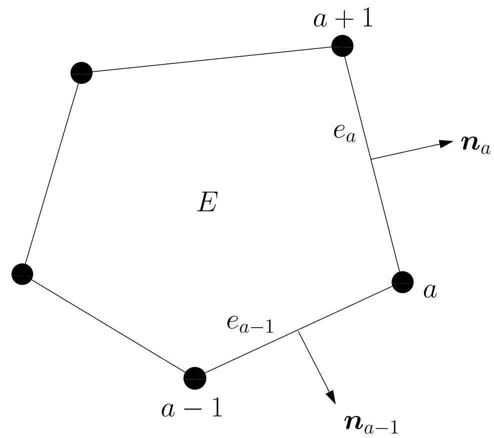


Figura 1: Representación esquemática de un elemento poligonal de $N = 5$ lados.

3.2. Operadores de proyección

Similarmente al método del elemento finito, para que la solución numérica converja monotónicamente se requiere que la aproximación de los desplazamientos en el elemento poligonal pueda representar modos de cuerpo rígido y estados de deformación constante. Esto exige que la aproximación de los desplazamientos en el elemento sea por lo menos un polinomio lineal [26]. Definiremos operadores de proyección que permitan la extracción de los modos de cuerpo rígido, los modos de deformación constante y la parte polinomial lineal del movimiento. En este contexto, la aproximación de los desplazamientos se supone continua en el elemento y a través de los contornos elementales (i.e., no existen huecos ni aberturas), lo cual también es una condición necesaria para la convergencia [26].

Consideremos los tres siguientes espacios a nivel elemental: el espacio de los movimientos de cuerpo rígido (denotado por $\mathcal{R}(E)$), el espacio de los estados de deformación constante (denotado por $\mathcal{C}(E)$), y el espacio de los desplazamientos lineales (denotado por $\mathcal{P}(E)$) que es capaz de representar movimientos de cuerpo rígido y estados de deformación constante. En particular, se require que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{R}(E) + \mathcal{C}(E)$. Antes de definir formalmente estos tres espacios, la siguiente definición es necesaria: el valor medio de una función h sobre los nodos del elemento poligonal está dado por

$$\overline{h} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} h(\boldsymbol{x}_j), \tag{16}$$

donde N es el número de nodos de coordenadas $\boldsymbol{x}_j$ que define al elemento poligonal. Por ejemplo, el valor medio de las coordenadas nodales del elemento poligonal se calcula usando (16) y lo denotamos por $\overline{\boldsymbol{x}}$. Las definiciones formales para los espacios se dan a continuación.

El espacio de los desplazamientos lineales se define como

$$\mathcal{P}(E) := \left\{ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) : \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2,\, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}, \tag{17}$$

donde $\boldsymbol{B}$ es un tensor de segundo orden y por lo tanto se puede expresar como la suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico. Denotemos el tensor simétrico y el tensor antisimétrico como $\boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}$ y $\boldsymbol{B}_{\mathrm{AS}}$, respectivamente. Dado que se requiere que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{R}(E) + \mathcal{C}(E)$, se definen los espacios de movimientos de cuerpo rígido y estados de deformación constante, respectivamente, como sigue:

$$\mathcal{R}(E) := \left\{ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{AS}} \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) : \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2,\, \boldsymbol{B}_{\mathrm{AS}} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\, \boldsymbol{B}_{\mathrm{AS}}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{B}_{\mathrm{AS}} \right\}, \tag{18}$$

$$\mathcal{C}(E) := \left\{ \boldsymbol{B}_{\mathrm{S}} \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) : \boldsymbol{B}_{\mathrm{S}} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\, \boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{S}} \right\}. \tag{19}$$

En elementos poligonales de más de tres nodos, la aproximación de los desplazamientos estará compuesta por una parte polinomial lineal y por una parte adicional no polinomial o de orden superior[†], lo cual implica que en el elemento $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{W}(E) \supseteq \mathcal{P}(E)$.

Para extraer las componentes de los desplazamientos en los tres espacios ya mencionados, se definen los siguientes operadores de proyección:

$$\mathit{\Pi}_{\mathcal{R}} : \mathcal{W}(E) \to \mathcal{R}(E), \quad \mathit{\Pi}_{\mathcal{R}} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}, \quad \forall \boldsymbol{r} \in \mathcal{R}(E) \tag{20}$$

para extraer los movimientos de cuerpo rígido,

$$\mathit{\Pi}_{\mathcal{C}} : \mathcal{W}(E) \to \mathcal{C}(E), \quad \mathit{\Pi}_{\mathcal{C}} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}, \quad \forall \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}(E) \tag{21}$$

para extraer los modos de deformación constante, y

$$\mathit{\Pi}_{\mathcal{P}} : \mathcal{W}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad \mathit{\Pi}_{\mathcal{P}} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}, \quad \forall \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}(E) \tag{22}$$

para extraer la parte polinomial lineal. Con el objetivo de garantizar que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{R}(E) + \mathcal{C}(E)$, se requiere que estos operadores satisfagan las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\mathit{\Pi}_{\mathcal{R}} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}, \quad \forall \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}(E) \tag{23}$$

$$\mathit{\Pi}_{\mathcal{C}} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \quad \forall \boldsymbol{r} \in \mathcal{R}(E), \tag{24}$$

tal que elementos de $\mathcal{C}$ no tengan movimientos de cuerpo rígido y elementos de $\mathcal{R}$ no tengan modos de deformación constante, lo que significa que $\mathit{\Pi}_{\mathcal{C}} \mathit{\Pi}_{\mathcal{R}} = \mathit{\Pi}_{\mathcal{R}} \mathit{\Pi}_{\mathcal{C}} = 0$, y entonces la proyección sobre $\mathcal{P}$ puede ser escrita como una suma directa de $\mathit{\Pi}_{\mathcal{R}}$ y $\mathit{\Pi}_{\mathcal{C}}$:

$$\mathit{\Pi}_{\mathcal{P}} = \mathit{\Pi}_{\mathcal{R}} + \mathit{\Pi}_{\mathcal{C}}. \tag{25}$$

Por lo tanto, cualquier $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{W}(E)$ puede ser descompuesto en los siguientes tres términos:

$$\boldsymbol{u} = \mathit{\Pi}_{\mathcal{R}} \boldsymbol{u} + \mathit{\Pi}_{\mathcal{C}} \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} - \mathit{\Pi}_{\mathcal{P}} \boldsymbol{u}), \tag{26a}$$

$$\boldsymbol{v} = \mathit{\Pi}_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v} + \mathit{\Pi}_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} - \mathit{\Pi}_{\mathcal{P}} \boldsymbol{v}), \tag{26b}$$

es decir, en una parte que representa los movimientos de cuerpo rígido, una parte que representa los estados de deformación constante y la parte restante que representa los términos no polinomiales o de orden superior. A la Ecuación (26) se le denomina *descomposición del elemento virtual*.

Unos operadores de proyección que satisfagan las condiciones de ortogonalidad (23) y (24) pueden ser construidos como sigue: definamos el tensor de deformación promediado en una celda como

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}s, \tag{27}$$

donde el teorema de la divergencia se ha utilizado para transformar la integral de volumen en una integral de superficie. Similarmente, el tensor gradiente antisimétrico promediado en una celda se define como

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}s. \tag{28}$$

Nótese que $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})$ y $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v})$ son tensores constantes dentro del elemento.

Usando las definiciones anteriores, la proyección de $\boldsymbol{v}$ sobre el espacio de movimientos de cuerpo rígido se escribe como sigue:

$$\mathit{\Pi}_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \overline{\boldsymbol{v}}, \tag{29}$$

[†]Solo para el polígono de menor orden posible, es decir el triángulo de tres nodos, la aproximación se compone únicamente de la parte polinomial lineal. Por ejemplo, la aproximación en el elemento finito cuadrilátero de cuatro nodos posee un monomio cuadrático que se consideraría como el término adicional de orden superior.

donde $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})$ y $\overline{\boldsymbol{v}}$ son los modos de rotación y traslación de $\boldsymbol{v}$, respectivamente. Y la proyección de $\boldsymbol{v}$ sobre el espacio de los estados de deformación constante está dada por

$$\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}). \tag{30}$$

Entonces, debido a (25), la proyección de $\boldsymbol{v}$ sobre el espacio de los desplazamientos lineales se escribe como

$$\Pi_{\mathcal{P}} \boldsymbol{v} = \Pi_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v} + \Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \overline{\boldsymbol{v}}. \tag{31}$$

Nótese que al comparar (29) con (18), se verifica que $\boldsymbol{B}_{\mathrm{AS}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v})$. También puede ser verificado que $\boldsymbol{B}_{\mathrm{S}} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})$.

Ahora procedemos a demostrar que las condiciones de ortogonalidad (23) y (24) se cumplen para las proyecciones (29) y (30), respectivamente. Comenzamos con la demostración para la condición de ortogonalidad dada en (23).

Demostración. De (7) y (30), se tiene que

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{AS}}(\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{c}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla} \Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{c} - \boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{T}} \Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{c}) - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{c})\right) = 0,$$

lo que debido a (28) implica que $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{c}) = 0$. Adicionalmente, $\overline{\boldsymbol{c}} = \overline{\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{c}} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{c}) \cdot (\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{x}}) = 0$. Por lo tanto, de (29) y de los resultados anteriores,

$$\Pi_{\mathcal{R}} \boldsymbol{c} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \overline{\boldsymbol{c}} = 0. \qquad \square$$

Y la condición de ortogonalidad dada en (24) se demuestra como sigue.

Demostración. De (29), $\boldsymbol{\nabla} \Pi_{\mathcal{R}} \boldsymbol{r} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{r})$. Y dado que $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{r})$ es un tensor antisimétrico, se tiene que $\boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{T}} \Pi_{\mathcal{R}} \boldsymbol{r} = -\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{r})$. Estos resultados se usan para obtener la siguiente deformación:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{S}}(\Pi_{\mathcal{R}} \boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla} \Pi_{\mathcal{R}} \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{T}} \Pi_{\mathcal{R}} \boldsymbol{r}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{r}) - \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{r})\right) = 0, \tag{32}$$

lo que muestra que los modos de cuerpo rígido tienen deformación nula. Por lo tanto, de (27), (30) y (32), se obtiene

$$\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{r} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) = \left(\frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) = 0. \qquad \square$$

3.3. Condiciones de ortogonalidad energética

El punto crucial en el MEV es que una vez que los desplazamientos (26) sean reemplazados en la forma bilineal (8) se logre de manera efectiva una separación de la matriz de rigidez que permita aislar los términos no polinomiales o de orden superior y así poder tomar control sobre el comportamiento de estos. Las siguientes condiciones de ortogonalidad energética son esenciales para este fin.

Consideremos la forma bilineal (8) para un elemento poligonal. La proyección $\Pi_{\mathcal{C}}$ satisface la siguiente condición:

$$a_E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}(E), \quad \boldsymbol{v} \in \mathcal{W}(E), \tag{33}$$

lo que significa que $\boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}$ es energéticamente ortogonal a $\mathcal{C}$. A continuación, la demostración de esta condición.

Demostración. De (6) y (30) se tiene que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{S}}(\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla} \Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{T}} \Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}) + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})\right) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}). \tag{34}$$

Usando (8) para el elemento poligonal, (27), (34), y notando que $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{c})$ y $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})$ son tensores constantes, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a_E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{c}) : \left[\int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right] \\
&= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{c}) : \left[\int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_E \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right] \\
&= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{c}) : \left[\int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}) \int_E \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right] \\
&= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{c}) : \left[\int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})|E| \right] \\
&= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{c}) : \left[\int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right] = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Adicionalmente, la siguiente condición de ortogonalidad energética emana de (33): la proyección $\Pi_{\mathcal{P}}$ satisface

$$a_E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}(E), \quad \boldsymbol{v} \in \mathcal{W}(E), \tag{35}$$

lo que significa que $\boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}$ es energéticamente ortogonal a $\mathcal{P}$. La demostración es la siguiente.

Demostración. Debido a que los modos de cuerpo rígido tienen deformación nula, cualquier término que contenga modos de cuerpo rígido en la forma bilineal debe ser exactamente cero. Entonces,

$$\begin{aligned}
a_E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) &= a_E(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{R}}\boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v}) \\
&= a_E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v}) - a_E(\boldsymbol{c}, \Pi_{\mathcal{R}}\boldsymbol{v}) + a_E(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{R}}\boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v}) \\
&= a_E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v}) = 0,
\end{aligned}$$

donde (33) fue utilizado en la última igualdad. $\square$

Una última observación. Dado que $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}$ y $a_E(\boldsymbol{r}, \cdot) = 0$, la siguiente condición de ortogonalidad energética nace de (35):

$$a_E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}(E), \quad \boldsymbol{v} \in \mathcal{W}(E). \tag{36}$$

3.4. Forma bilineal del MEV

Sustituyendo la descomposición (26) en la forma bilineal (8) lleva a la siguiente descomposición de la forma bilineal en el elemento:

$$\begin{aligned}
a_E(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= a_E(\Pi_{\mathcal{R}}\boldsymbol{u} + \Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}), \Pi_{\mathcal{R}}\boldsymbol{v} + \Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v})) \\
&= a_E(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{u}, \Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v}) + a_E(\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}),
\end{aligned} \tag{37}$$

donde los siguientes argumentos han sido usados: la simetría de la forma bilineal, los términos $\Pi_{\mathcal{R}}\boldsymbol{v}$ y $\Pi_{\mathcal{R}}\boldsymbol{u}$ no contribuyen en la forma bilineal (ambos tienen deformación nula), y la condición de ortogonalidad energética (36).

El primer término en el lado derecho de (37) es la forma bilineal asociada a los modos de deformación constante que proveen consistencia (llevan a la matriz de rigidez de *consistencia*) y el segundo término es la forma bilineal asociada a los términos no polinomiales o de orden superior que proveen estabilidad (llevan a la matriz de rigidez de *estabilidad*). Volveremos a estos dos conceptos más adelante en esta sección.

3.5. Reexaminando los operadores de proyección

Los operadores de proyección del MEV (29), (30) y (31) pueden ser obtenidos “intrínsecamente” de la condición de ortogonalidad energética (35). Para lograr esto, observemos que $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p})$ y $\boldsymbol{\nabla}(\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v})$ son campos constantes debido a que $\boldsymbol{p}$, $\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v} \in \mathcal{P}(E)$. Usemos la observación precendente y la forma bilineal dada en (4) para obtener

$$\begin{aligned} a_E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) &= \int_E \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) : \left[\int_E \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\nabla}(\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v})\int_E \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right] \\ &= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) : \left[\int_E \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\nabla}(\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v})|E|\right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Y dado que (38) debe ser exactamente cero por la condición ortogonal (35), se llega a

$$\boldsymbol{\nabla}(\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) = \frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{39}$$

Usando (5), (27) y (28), la Ecuación (39) puede ser reescrita como sigue:

$$\boldsymbol{\nabla}(\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) = \frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}) + \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v}). \tag{40}$$

Por lo tanto, de (40), $\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}$ debe tener la siguiente forma:

$$\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{x} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{x} + a_0. \tag{41}$$

Y debido a que a_0 es una constante, la proyección $a_E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) = 0$ define $\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}$ solo hasta una constante. Entonces, para encontrar a_0 necesitamos un operador de proyección sobre las constantes, $\Pi_0 : \mathcal{W}(E) \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$\Pi_0(\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) = \Pi_0\boldsymbol{v}. \tag{42}$$

Es suficiente usar (16) como el operador sobre las constantes [5,7]. Esto resulta en

$$\Pi_0\boldsymbol{v} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_j) = \overline{\boldsymbol{v}}, \tag{43}$$

la cual satisface (42) como se comprueba en la siguiente demostración.

Demostración.

$$\begin{aligned} \Pi_0(\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) &= \Pi_0(\Pi_{\mathcal{R}}\boldsymbol{v}) + \Pi_0(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v}) \\ &= \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v})\cdot(\Pi_0\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \overline{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})\cdot(\Pi_0\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) \\ &= \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v})\cdot(\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \overline{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})\cdot(\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{x}}) \\ &= \overline{\boldsymbol{v}} \\ &= \Pi_0\boldsymbol{v}, \end{aligned}$$

donde se ha usado que $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v})$ y $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})$ son tensores constantes. □

Aplicando (42) a (41) resulta en

$$\begin{aligned} \Pi_0(\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}) &= \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})\cdot\Pi_0\boldsymbol{x} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v})\cdot\Pi_0\boldsymbol{x} + \Pi_0 a_0 = \Pi_0\boldsymbol{v} \\ &= \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})\cdot\overline{\boldsymbol{x}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v})\cdot\overline{\boldsymbol{x}} + a_0 = \overline{\boldsymbol{v}}. \end{aligned} \tag{44}$$

Y resolviendo para encontrar a_0 en (44) se llega a

$$a_0 = \overline{\boldsymbol{v}} - \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}) \cdot \overline{\boldsymbol{x}} - \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v}) \cdot \overline{\boldsymbol{x}}. \tag{45}$$

Finalmente, sustituyendo (45) en (41) se obtiene el operador de proyección que ya había sido dado en (31):

$$\Pi_{\mathcal{P}} \boldsymbol{v} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) + \overline{\boldsymbol{v}}. \tag{46}$$

3.6. Matrices de proyección

Las matrices de proyección resultan de discretizar los operadores de proyección. Para facilitar las derivaciones, empezamos por escribir las proyecciones $\Pi_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v}$ y $\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}$ en términos de sus bases espaciales. Para lograr lo anterior, consideremos el espacio Cartesiano bidimensional y la antisimetría de $\widehat{\boldsymbol{\omega}} \equiv \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{v})$[‡]. La proyección (29) puede ser escrita como sigue:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathcal{R}} \boldsymbol{v} &= \begin{bmatrix} \overline{v}_1 + (x_2 - \overline{x}_2)\widehat{\omega}_{12} \\ \overline{v}_2 - (x_1 - \overline{x}_1)\widehat{\omega}_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_2 - \overline{x}_2) \\ 0 & 1 & -(x_1 - \overline{x}_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \widehat{\omega}_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \overline{v}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{v}_2 + \begin{bmatrix} (x_2 - \overline{x}_2) \\ -(x_1 - \overline{x}_1) \end{bmatrix} \widehat{\omega}_{12} \\
&= \boldsymbol{r}_1 \overline{v}_1 + \boldsymbol{r}_2 \overline{v}_2 + \boldsymbol{r}_3 \widehat{\omega}_{12}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Así, la base para el espacio de los modos de cuerpo rígido es:

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \ \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \ \boldsymbol{r}_3 = \begin{bmatrix} (x_2 - \overline{x}_2) & -(x_1 - \overline{x}_1) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}. \tag{48}$$

Similarmente, considerando la simetría de $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})$, la proyección (30) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} &= \begin{bmatrix} (x_1 - \overline{x}_1)\widehat{\varepsilon}_{11} + (x_2 - \overline{x}_2)\widehat{\varepsilon}_{12} \\ (x_1 - \overline{x}_1)\widehat{\varepsilon}_{12} + (x_2 - \overline{x}_2)\widehat{\varepsilon}_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x_1 - \overline{x}_1) & 0 & (x_2 - \overline{x}_2) \\ 0 & (x_2 - \overline{x}_2) & (x_1 - \overline{x}_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\varepsilon}_{11} \\ \widehat{\varepsilon}_{22} \\ \widehat{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x_1 - \overline{x}_1) \\ 0 \end{bmatrix} \widehat{\varepsilon}_{11} + \begin{bmatrix} 0 \\ (x_2 - \overline{x}_2) \end{bmatrix} \widehat{\varepsilon}_{22} + \begin{bmatrix} (x_2 - \overline{x}_2) \\ (x_1 - \overline{x}_1) \end{bmatrix} \widehat{\varepsilon}_{12} \\
&= \boldsymbol{c}_1 \widehat{\varepsilon}_{11} + \boldsymbol{c}_2 \widehat{\varepsilon}_{22} + \boldsymbol{c}_3 \widehat{\varepsilon}_{12}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Así, la base para el espacio de los estados de deformación constante es:

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} (x_1 - \overline{x}_1) & 0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \ \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & (x_2 - \overline{x}_2) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \ \boldsymbol{c}_3 = \begin{bmatrix} (x_2 - \overline{x}_2) & (x_1 - \overline{x}_1) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}. \tag{50}$$

En cada elemento poligonal de N lados y con coordenadas nodales denotadas por $\boldsymbol{x}_a = [x_{1a} \quad x_{2a}]^{\mathsf{T}}$, los desplazamientos de prueba y de peso están dados por

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{N} \phi_a(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_a, \quad \boldsymbol{v}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{b=1}^{N} \phi_b(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{v}_b, \tag{51}$$

[‡]Notar que $\widehat{\omega}_{11} = \widehat{\omega}_{22} = 0$ y $\widehat{\omega}_{21} = -\widehat{\omega}_{12}$.

donde $\phi_a(\boldsymbol{x})$ y $\phi_b(\boldsymbol{x})$ son funciones de base nodales, y $\boldsymbol{u}_a = [u_{1a} \quad u_{2a}]^\mathsf{T}$ y $\boldsymbol{v}_b = [v_{1b} \quad v_{2b}]^\mathsf{T}$ son desplazamientos nodales. Las funciones de base nodales también se usan para la discretización de las componentes de la base para el espacio de los modos de cuerpo rígido:

$$\boldsymbol{r}_\alpha^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{N} \phi_a(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{r}_\alpha(\boldsymbol{x}_a), \quad \alpha = 1, \ldots, 3 \tag{52}$$

y de las componentes de la base para el espacio de los modos de deformación constante:

$$\boldsymbol{c}_\beta^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{N} \phi_a(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{c}_\beta(\boldsymbol{x}_a), \quad \beta = 1, \ldots, 3. \tag{53}$$

La forma discreta de la proyección para extraer los modos de cuerpo rígido se obtiene mediante la sustitución de (51) y (52) en (47), lo que lleva a

$$\begin{aligned} \left(\varPi_\mathcal{R} \boldsymbol{v}^h\right)_{ab} &= \left[\begin{array}{ccc} \phi_a \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] & \phi_a \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] & \phi_a \left[\begin{array}{c} (x_{2a} - \overline{x}_2) \\ -(x_{1a} - \overline{x}_1) \end{array} \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \overline{\phi}_b v_{1b} \\ \overline{\phi}_b v_{2b} \\ q_{2b} v_{1b} - q_{1b} v_{2b} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \phi_a & 0 \\ 0 & \phi_a \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & (x_{2a} - \overline{x}_2) \\ 0 & 1 & -(x_{1a} - \overline{x}_1) \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \overline{\phi}_b & 0 \\ 0 & \overline{\phi}_b \\ q_{2b} & -q_{1b} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_{1b} \\ v_{2b} \end{array} \right], \end{aligned} \tag{54}$$

donde

$$q_{ia} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} \phi_a n_i \, \mathrm{d}s, \quad i = 1, 2 \tag{55}$$

apareció debido a la discretización de $\widehat{\omega}_{12}$ (ver (28)). La forma matricial de (54) se obtiene mediante la expansión de los índices nodales como sigue:

$$\varPi_\mathcal{R} \boldsymbol{v}^h = \sum_{a=1}^{N} \sum_{b=1}^{N} \left(\varPi_\mathcal{R} \boldsymbol{v}^h\right)_{ab} = \boldsymbol{N} \boldsymbol{P}_\mathcal{R} \boldsymbol{q}, \tag{56}$$

donde

$$\boldsymbol{N} = [(\boldsymbol{N})_1 \quad \cdots \quad (\boldsymbol{N})_a \quad \cdots \quad (\boldsymbol{N})_N] \,, \; (\boldsymbol{N})_a = \left[\begin{array}{cc} \phi_a & 0 \\ 0 & \phi_a \end{array} \right], \tag{57}$$

$$\boldsymbol{q} = \left[\boldsymbol{v}_1^\mathsf{T} \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_a^\mathsf{T} \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_N^\mathsf{T}\right]^\mathsf{T}, \; \boldsymbol{v}_a = [v_{1a} \quad v_{2a}]^\mathsf{T} \tag{58}$$

y

$$\boldsymbol{P}_\mathcal{R} = \boldsymbol{H}_\mathcal{R} \boldsymbol{W}_\mathcal{R}^\mathsf{T} \tag{59}$$

con

$$\boldsymbol{H}_\mathcal{R} = [\; (\boldsymbol{H}_\mathcal{R})_1 \quad \cdots \quad (\boldsymbol{H}_\mathcal{R})_a \quad \cdots \quad (\boldsymbol{H}_\mathcal{R})_N \;]^\mathsf{T}, \quad (\boldsymbol{H}_\mathcal{R})_a = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ (x_{2a} - \overline{x}_2) & -(x_{1a} - \overline{x}_1) \end{array} \right]^\mathsf{T} \tag{60}$$

y

$$\boldsymbol{W}_\mathcal{R} = [\; (\boldsymbol{W}_\mathcal{R})_1 \quad \cdots \quad (\boldsymbol{W}_\mathcal{R})_a \quad \cdots \quad (\boldsymbol{W}_\mathcal{R})_N \;]^\mathsf{T}, \quad (\boldsymbol{W}_\mathcal{R})_a = \left[\begin{array}{cc} \overline{\phi}_a & 0 \\ 0 & \overline{\phi}_a \\ q_{2a} & -q_{1a} \end{array} \right]^\mathsf{T}. \tag{61}$$

Similarmente, sustituyendo (51) y (53) en (49) se llega a la siguiente forma discreta de la proyección para extraer los modos de deformación constante:

$$\begin{aligned} \left(\varPi_\mathcal{C} \boldsymbol{v}^h\right)_{ab} &= \left[\begin{array}{ccc} \phi_a \left[\begin{array}{c} (x_{1a} - \overline{x}_1) \\ 0 \end{array} \right] & \phi_a \left[\begin{array}{c} 0 \\ (x_{2a} - \overline{x}_2) \end{array} \right] & \phi_a \left[\begin{array}{c} (x_{2a} - \overline{x}_2) \\ (x_{1a} - \overline{x}_1) \end{array} \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2q_{1b} v_{1b} \\ 2q_{2b} v_{2b} \\ q_{2b} v_{1b} + q_{1b} v_{2b} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \phi_a & 0 \\ 0 & \phi_a \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} (x_{1a} - \overline{x}_1) & 0 & (x_{2a} - \overline{x}_2) \\ 0 & (x_{2a} - \overline{x}_2) & (x_{1a} - \overline{x}_1) \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 2q_{1b} & 0 \\ 0 & 2q_{2b} \\ q_{2b} & q_{1b} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_{1b} \\ v_{2b} \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{62}$$

La forma matricial de (62) se obtiene mediante la expansión de los índices nodales como sigue:

$$\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}^h = \sum_{a=1}^{N} \sum_{b=1}^{N} \left(\Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}^h\right)_{ab} = \boldsymbol{N} \boldsymbol{P}_{\mathcal{C}} \boldsymbol{q}, \tag{63}$$

donde

$$\boldsymbol{P}_{\mathcal{C}} = \boldsymbol{H}_{\mathcal{C}} \boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}} \tag{64}$$

con

$$\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}} = \left[\begin{array}{ccccc} (\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}})_1 & \cdots & (\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}})_a & \cdots & (\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}})_N \end{array} \right]^{\mathsf{T}}, \quad (\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}})_a = \left[\begin{array}{cc} (x_{1a} - \overline{x}_1) & 0 \\ 0 & (x_{2a} - \overline{x}_2) \\ (x_{2a} - \overline{x}_2) & (x_{1a} - \overline{x}_1) \end{array} \right]^{\mathsf{T}} \tag{65}$$

y

$$\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}} = \left[\begin{array}{ccccc} (\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}})_1 & \cdots & (\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}})_a & \cdots & (\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}})_N \end{array} \right]^{\mathsf{T}}, \quad (\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}})_a = \left[\begin{array}{cc} 2q_{1a} & 0 \\ 0 & 2q_{2a} \\ q_{2a} & q_{1a} \end{array} \right]^{\mathsf{T}}. \tag{66}$$

Entonces, la forma matricial de la proyección para extraer la parte polinomial lineal del campo de los desplazamientos es $\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{P}_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{P}_{\mathcal{C}}$.

Para el desarrollo de la matriz de rigidez de *consistencia* que se realiza en la siguiente sección, será útil tener la siguiente expresión alternativa para la forma discreta de la proyección para extraer los modos de deformación constante:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}^h &= \boldsymbol{c}_1 \widehat{\varepsilon}_{11} + \boldsymbol{c}_2 \widehat{\varepsilon}_{22} + \boldsymbol{c}_3 \widehat{\varepsilon}_{12} \\ &= \boldsymbol{c}_1 \sum_{b=1}^{N} 2q_{1b} v_{1b} + \boldsymbol{c}_2 \sum_{b=1}^{N} 2q_{2b} v_{2b} + \boldsymbol{c}_3 \sum_{b=1}^{N} (q_{2b} v_{1b} + q_{1b} v_{2b}) \\ &= \sum_{b=1}^{N} \left[\begin{array}{cc} 2q_{1b} \boldsymbol{c}_1 + q_{2b} \boldsymbol{c}_3 & 2q_{2b} \boldsymbol{c}_2 + q_{1b} \boldsymbol{c}_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_{1b} \\ v_{2b} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{array} \right] \sum_{b=1}^{N} \left[\begin{array}{cc} 2q_{1b} & 0 \\ 0 & 2q_{2b} \\ q_{2b} & q_{1b} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_{1b} \\ v_{2b} \end{array} \right] \\ &= \boldsymbol{c} \, \boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}} \, \boldsymbol{q}. \end{aligned} \tag{67}$$

Finalmente, la forma discreta de la proyección sobre las constantes se obtiene mediante la sustitución de (51) en (43), lo que resulta en

$$\begin{aligned} \left(\Pi_0 \boldsymbol{v}^h\right)_a &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\begin{array}{cc} \phi_a(\boldsymbol{x}_j) & 0 \\ 0 & \phi_a(\boldsymbol{x}_j) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_{1a} \\ v_{2a} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \overline{\phi}_a & 0 \\ 0 & \overline{\phi}_a \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_{1a} \\ v_{2a} \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{68}$$

La forma matricial de (68) se obtiene mediante la expansión de los índices nodales como sigue:

$$\Pi_0 \boldsymbol{v}^h = \sum_{a=1}^{N} \left(\Pi_0 \boldsymbol{v}^h\right)_a = \overline{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{q}, \tag{69}$$

donde

$$\overline{\boldsymbol{N}} = \left[(\overline{\boldsymbol{N}})_1 \quad \cdots \quad (\overline{\boldsymbol{N}})_a \quad \cdots \quad (\overline{\boldsymbol{N}})_N \right], \quad (\overline{\boldsymbol{N}})_a = \left[\begin{array}{cc} \overline{\phi}_a & 0 \\ 0 & \overline{\phi}_a \end{array} \right]. \tag{70}$$

3.7. Matriz de rigidez elemental del MEV

La descomposición dada en (37) se usa para construir la forma bilineal aproximada y dependiente de la malla, $a_E^h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, de tal modo que pueda ser computada en forma algebraica a nivel elemental. Con este fin, se aproxima el término $a_E(\boldsymbol{u}-\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v})$, el cual no es computable, con uno que es computable y que está dado por $s_E(\boldsymbol{u}-\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v})$ para luego definir:

$$a_E^h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := a_E(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{u},\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v}) + s_E(\boldsymbol{u}-\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}), \tag{71}$$

donde el lado derecho, como será evidente más adelante en esta sección, se computa algebraicamente. Se ha demostrado que la descomposición (71) posee las siguientes propiedades cruciales para establecer convergencia [5,6]:

Para todo h y para todo E en $\mathcal{T}^h$

- *Consistencia*: $\forall \boldsymbol{p}\in\mathcal{P}(E)$, $\forall \boldsymbol{v}^h\in V^h$

$$a_E^h(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v}^h) = a_E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v}^h). \tag{72}$$

- *Estabilidad*: $\exists$ dos constantes $\alpha_*>0$ y $\alpha^*>0$, independientes de h y de E, tal que

$$\forall \boldsymbol{v}^h\in V^h \quad \alpha_* a_E(\boldsymbol{v}^h,\boldsymbol{v}^h) \le a_E^h(\boldsymbol{v}^h,\boldsymbol{v}^h) \le \alpha^* a_E(\boldsymbol{v}^h,\boldsymbol{v}^h). \tag{73}$$

Por supuesto, el término computable, $s_E(\boldsymbol{u}-\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v})$, debe ser elegido de modo tal que las condiciones (72) y (73) se cumplan.

La versión discreta de la forma bilineal del MEV (71) se construye como se describe a continuación. Se sustituye (67) en el primer término del lado derecho de (71); se usa (56) y (63) para obtener $\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}^h = \Pi_{\mathcal{R}}\boldsymbol{v}^h + \Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{N}\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}}\boldsymbol{q}$, donde $\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{H}_{\mathcal{R}}\boldsymbol{W}_{\mathcal{R}}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{H}_{\mathcal{C}}\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}}$. También, se debe notar que $\boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{N}\boldsymbol{q}$. Luego, se sustituyen las expresiones para $\Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{v}^h$ y $\boldsymbol{v}^h$ en el segundo término del lado derecho de (71). Todo lo anterior resulta en

$$\begin{aligned} a_E^h(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v}^h) &= a_E(\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}}\,\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}}\,\boldsymbol{q}) + s_E(\boldsymbol{N}\boldsymbol{d}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}}\boldsymbol{d},\boldsymbol{N}\boldsymbol{q}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}}\boldsymbol{q}) \\ &= \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}\,a_E(\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}},\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{I}_{2N}-\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}})^{\mathsf{T}}\,s_E(\boldsymbol{N}^{\mathsf{T}},\boldsymbol{N})\,(\boldsymbol{I}_{2N}-\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}})\,\boldsymbol{d} \\ &= \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}|E|\,\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{I}_{2N}-\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}})^{\mathsf{T}}\,\boldsymbol{S}_E\,(\boldsymbol{I}_{2N}-\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}})\,\boldsymbol{d}, \end{aligned} \tag{74}$$

donde $\boldsymbol{I}_{2N}$ es la matriz de identidad de tamaño $(2N\times 2N)$, $\boldsymbol{d}$ es el vector columna de los desplazamientos nodales y $\boldsymbol{S}_E = s_E(\boldsymbol{N}^{\mathsf{T}},\boldsymbol{N})$. Usando la notación de Voigt y observando que $\varepsilon(\boldsymbol{c}) = [\ \varepsilon_{11}(\boldsymbol{c})\ \ \varepsilon_{22}(\boldsymbol{c})\ \ \varepsilon_{12}(\boldsymbol{c})\ ]^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{I}_3$ (la matriz de identidad de tamaño (3×3)), en (74) se ha usado que $a_E(\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}},\boldsymbol{c}) = \int_E \varepsilon^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{c})\boldsymbol{D}\varepsilon(\boldsymbol{c})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}\int_E \mathrm{d}\boldsymbol{x} = |E|\boldsymbol{D}$, donde $\boldsymbol{D}$ es la matriz constitutiva para un material lineal elástico e isotrópico dada por

$$\boldsymbol{D} = \frac{E_Y}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-2\nu) \end{bmatrix} \tag{75}$$

para el estado de deformación plana, y

$$\boldsymbol{D} = \frac{E_Y}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \tag{76}$$

para el estado de esfuerzo plano, donde E_Y es el módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson.

El primer término del lado derecho de (74) es la parte que provee *consistencia* a la forma bilineal discreta del MEV y que permite pasar el test de la parcela cuando la solución es un campo de desplazamientos lineal (se satisface la condición (72)). El segundo término del lado derecho de (74) es la parte que provee *estabilidad* a la forma bilineal discreta del MEV y es dependiente de la matriz $\boldsymbol{S}_E = s_E(\boldsymbol{N}^\mathsf{T}, \boldsymbol{N})$. Esta matriz debe ser elegida de modo tal que la condición (73) se cumpla sin poner en riesgo el cumplimiento de la condición (72) que ya fue tomada en cuenta por la parte consistente. Podemos explorar las propiedades deseables para $\boldsymbol{S}_E$ mediante inspección. Con este fin, denotemos el espacio de términos no polinomiales y de orden superior por $\mathcal{H}$. Entonces, para $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ la forma bilineal del MEV dada en (71) lleva a

$$a_E(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}) = s_E(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}). \tag{77}$$

Sin duda, en (77) s_E debe ser definida positiva sobre el espacio $\mathcal{H}$ para que a los modos de deformación no polinomiales o de orden superior, no nulos, no les sean asignados energía de deformación nula; s_E también debería escalar como la forma bilineal exacta a_E. Por lo tanto, la matriz computable $\boldsymbol{S}_E$ debe poseer estas propiedades ya mencionadas. Existen varias posibilidades para elegir esta matriz (ver por ejemplo las Referencias [5, 6, 18]). Aquí adoptaremos $\boldsymbol{S}_E$ dada por [18]

$$\boldsymbol{S}_E = \alpha_E\, \boldsymbol{I}_{2N}, \quad \alpha_E = \gamma \frac{|E|\mathrm{trace}(\boldsymbol{D})}{\mathrm{trace}(\boldsymbol{H}_\mathcal{C}^\mathsf{T} \boldsymbol{H}_\mathcal{C})}, \tag{78}$$

donde α_E es un parámetro de escalamiento y usualmente $\gamma = 1$.

De (74), la expresión final para la matriz de rigidez del MEV puede ser escrita como la suma de la matriz de rigidez de *consistencia* y la matriz de rigidez de *estabilidad*, respectivamente, como sigue:

$$\boldsymbol{K}_E = |E|\, \boldsymbol{W}_\mathcal{C}\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{W}_\mathcal{C}^\mathsf{T} + (\boldsymbol{I}_{2N} - \boldsymbol{P}_\mathcal{P})^\mathsf{T}\, \boldsymbol{S}_E\, (\boldsymbol{I}_{2N} - \boldsymbol{P}_\mathcal{P}), \tag{79}$$

donde debemos recordar que $\boldsymbol{P}_\mathcal{P} = \boldsymbol{H}_\mathcal{R} \boldsymbol{W}_\mathcal{R}^\mathsf{T} + \boldsymbol{H}_\mathcal{C} \boldsymbol{W}_\mathcal{C}^\mathsf{T}$. Notar que $\boldsymbol{H}_\mathcal{R}$ y $\boldsymbol{H}_\mathcal{C}$, las que están dadas en (60) y (65), respectivamente, son calculadas usando solamente las coordenadas nodales del elemento. No obstante, para poder calcular $\boldsymbol{W}_\mathcal{R}$ y $\boldsymbol{W}_\mathcal{C}$ (ver sus expresiones en (61) y (66), respectivamente) necesitamos conocer algo del comportamiento de las funciones de base para poder determinar $\overline{\phi}_a$ y q_{ia}. Observemos que $\overline{\phi}_a$ se calcula usando (43), lo que requiere el conocimiento de las funciones de base en los nodos del elemento. Por otro lado, q_{ia} se calcula usando (55), lo que requiere el conocimiento de las funciones de base sobre los lados del elemento. Por lo tanto, todo lo que necesitamos conocer acerca de las funciones de base es el comportamiento de estas sobre el contorno del elemento. En el MEV, se hace la suposición de que las funciones de base son lineales por tramo (lado por lado) y continuas sobre los lados del elemento, lo que implica que $\phi_a(\boldsymbol{x}_b) = \delta_{ab}$, donde $\boldsymbol{x}_b$ son las coordenadas nodales y δ_{ab} es la función delta Kronecker. Esta suposición permite el cómputo de $\overline{\phi}_a$ simplemente como

$$\overline{\phi}_a = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \phi_a(\boldsymbol{x}_j) = \frac{1}{N} \tag{80}$$

y el cálculo exacto de q_{ia} mediante una regla trapezoidal, lo que da

$$q_{ia} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} \phi_a n_i \,\mathrm{d}s = \frac{1}{4|E|} \left(|e_{a-1}| \{n_i\}_{a-1} + |e_a| \{n_i\}_a \right), \quad i = 1, 2, \tag{81}$$

donde $\{n_i\}_a$ son las componentes de $\boldsymbol{n}_a$ y $|e_a|$ es el largo de los lados que inciden en el nodo a, tal como se define en la Figura 1.

En el MEV, se utilizan las Ecuaciones (80) y (81), lo que se traduce en que las funciones de base no se evalúan explícitamente — de hecho, nunca se calculan. Por esta razón, se dice que las funciones de base del MEV son *virtuales*. Además, no se requiere el conocimiento de las funciones de base en el interior del elemento, aún cuando la aproximación en el interior del elemento sigue siendo lineal y está dada por (31). En consecuencia, una definición más específica para el espacio de los desplazamientos de prueba que la definición ya dada en la Sección 2.2 es la siguiente [5, 8]:

$$V^h := \left\{ \boldsymbol{v}^h \in [H^1(E) \cap C^0(E)]^2 : \Delta \boldsymbol{v}^h = \boldsymbol{0} \text{ en } E,\ \boldsymbol{v}^h|_e = \mathcal{P}(e)\, \forall e \in \partial E \right\}, \tag{82}$$

la que se conoce con el nombre de *espacio del elemento virtual*.

3.8. Vector elemental de fuerzas de cuerpo y de tracción del MEV

Para desplazamientos lineales, la fuerza de cuerpo puede ser aproximada por una constante por tramos. En el MEV, esta aproximación constante por tramos suele definirse como un promedio en la celda dado por $\boldsymbol{b}^h = \frac{1}{|E|}\int_E \boldsymbol{b}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \widehat{\boldsymbol{b}}$. Por lo tanto, la forma lineal discreta del MEV que contiene el término de las fuerzas de cuerpo puede ser computado del siguiente modo [2,5,6]:

$$\ell_{b,E}^h(\boldsymbol{v}^h) = \int_E \boldsymbol{b}^h \cdot \Pi_0 \boldsymbol{v}^h \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = |E|\widehat{\boldsymbol{b}} \cdot \overline{\boldsymbol{v}}^h = \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}} |E|\, \overline{\boldsymbol{N}}^{\mathsf{T}} \widehat{\boldsymbol{b}}. \tag{83}$$

Entonces, el vector elemental de fuerzas de cuerpo del MEV está dado por

$$\boldsymbol{f}_{b,E} = |E|\, \overline{\boldsymbol{N}}^{\mathsf{T}} \widehat{\boldsymbol{b}}. \tag{84}$$

El vector elemental de fuerzas de tracción del MEV es similar al de fuerzas de cuerpo, pero la integral es de una dimensión menor. Por lo tanto, considerando el lado del elemento como un elemento unidimensional de dos nodos, el vector elemental de fuerzas de tracción del MEV puede ser calculado similarmente al de fuerzas de cuerpo del siguiente modo:

$$\boldsymbol{f}_{f,e} = |e|\, \overline{\boldsymbol{N}}_{\Gamma}^{\mathsf{T}}\, \widehat{\boldsymbol{f}}, \tag{85}$$

donde

$$\overline{\boldsymbol{N}}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} \overline{\phi}_1 & 0 & \overline{\phi}_2 & 0 \\ 0 & \overline{\phi}_1 & 0 & \overline{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & 0 & \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{86}$$

y $\widehat{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{|e|}\int_e \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}s$.

3.9. Norma L^2 y seminorma H^1 del error

Para estudiar la exactitud y la convergencia del MEV, se utilizan dos medidas globales del error. La norma L^2 relativa del error en los desplazamientos definida como

$$\frac{||\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}^h||_{L^2(\Omega)}}{||\boldsymbol{u}||_{L^2(\Omega)}} = \sqrt{\frac{\sum_E \int_E \left(\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}^h\right)^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}^h\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\sum_E \int_E \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}}, \tag{87}$$

y la seminorma H^1 relativa del error en los desplazamientos dada por

$$\frac{||\boldsymbol{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{u}^h||_{H^1(\Omega)}}{||\boldsymbol{u}||_{H^1(\Omega)}} = \sqrt{\frac{\sum_E \int_E \left(\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{u}^h)\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D} \left(\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \varepsilon(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{u}^h)\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\sum_E \int_E \varepsilon(\boldsymbol{u})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{D}\varepsilon(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}}, \tag{88}$$

donde la deformación aparece en notación de Voigt, y por (34), $\varepsilon(\Pi_{\mathcal{C}}\boldsymbol{u}^h) = \widehat{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^h)$.

En las normas, las integrales sobre el elemento E se calculan usando cuadratura numérica. Para esto, el polígono se particiona en triángulos y se definen puntos de integración en ellos.

3.10. Matriz de rigidez elemental del MEV para el problema de Poisson

La formulación del MEV para el problema de Poisson se desarrolla de manera similar al problema de la elasticidad lineal estática. No obstante, aquí se ha decidido desarrollar la matriz de rigidez elemental del MEV para el problema de Poisson por reducción en la formulación para la elasticidad lineal estática. El problema de Poisson con el que trabajaremos es el siguiente: consideremos un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que está limitado por la superficie unidimensional Γ cuya normal apuntando hacia el exterior es $\boldsymbol{n}_\Gamma$. El contorno esencial (o de Dirichlet) se denota por Γ_g. El cierre del contorno del dominio es $\overline{\Omega} \equiv \Omega \cup \Gamma$. Sea $u(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable de campo y $f(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ el término fuente. Las condiciones de contorno esenciales (o de Dirichlet) impuestas son $g(\boldsymbol{x}) : \Gamma_g \to \mathbb{R}$. El problema de valor de contorno que gobierna el problema de Poisson se lee como sigue: encontrar $u(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$-\boldsymbol{\nabla}^2 u = f \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{89a}$$

$$u = g \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_g. \tag{89b}$$

En la formulación del MEV para la elasticidad lineal estática, se realizan las siguientes reducciones: el campo de los desplazamientos se reduce al campo escalar $u(\boldsymbol{x})$, la deformación se simplifica a $\boldsymbol{\varepsilon}(u) = \boldsymbol{\nabla} u$, las rotaciones quedan como $\boldsymbol{\omega}(u) = \boldsymbol{0}$, y la matriz constitutiva del material se reemplaza por la matriz de identidad de tamaño (2×2). Luego, las proyecciones del MEV para el problema de Poisson quedan como $\Pi_{\mathcal{R}} u = \overline{u}$ y $\Pi_{\mathcal{C}} u = \widehat{\varepsilon}(u) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})$. Las matrices que resultan de la discretización de los operadores de proyección se simplifican a

$$\boldsymbol{H}_{\mathcal{R}} = \left[\, (\boldsymbol{H}_{\mathcal{R}})_1 \quad \cdots \quad (\boldsymbol{H}_{\mathcal{R}})_a \quad \cdots \quad (\boldsymbol{H}_{\mathcal{R}})_N \,\right]^{\mathsf{T}}, \quad (\boldsymbol{H}_{\mathcal{R}})_a = 1, \tag{90}$$

$$\boldsymbol{W}_{\mathcal{R}} = \left[\, (\boldsymbol{W}_{\mathcal{R}})_1 \quad \cdots \quad (\boldsymbol{W}_{\mathcal{R}})_a \quad \cdots \quad (\boldsymbol{W}_{\mathcal{R}})_N \,\right]^{\mathsf{T}}, \quad (\boldsymbol{W}_{\mathcal{R}})_a = \frac{1}{N}, \tag{91}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}} = \left[\, (\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}})_1 \quad \cdots \quad (\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}})_a \quad \cdots \quad (\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}})_N \,\right]^{\mathsf{T}}, \quad (\boldsymbol{H}_{\mathcal{C}})_a = \left[\, (x_{1a} - \overline{x}_1) \quad (x_{2a} - \overline{x}_2) \,\right], \tag{92}$$

$$\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}} = \left[\, (\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}})_1 \quad \cdots \quad (\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}})_a \quad \cdots \quad (\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}})_N \,\right]^{\mathsf{T}}, \quad (\boldsymbol{W}_{\mathcal{C}})_a = \left[\, 2q_{1a} \quad 2q_{2a} \,\right]. \tag{93}$$

Usando las matrices precedentes, la matriz de proyección es $\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{H}_{\mathcal{R}} \boldsymbol{W}_{\mathcal{R}}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{H}_{\mathcal{C}} \boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}}$ y la expresión final para la matriz de rigidez del VEM para el problema de Poisson se escribe como

$$\boldsymbol{K}_E = |E|\, \boldsymbol{W}_{\mathcal{C}} \boldsymbol{W}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}} + (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{P}_{\mathcal{P}})^{\mathsf{T}} (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{P}_{\mathcal{P}}), \tag{94}$$

donde $\boldsymbol{I}_N$ es la matriz de identidad de tamaño $(N \times N)$ y $\boldsymbol{S}_E = \boldsymbol{I}_N$ ha sido utilizada en la matriz de rigidez de estabilidad dado que esta elección es adecuada para el problema de Poisson [5].

4. Ejemplos numéricos

En esta sección se presentan algunos ejemplos numéricos que fueron resueltos usando el programa `VEMLab`, una librería escrita en MATLAB que implementa el MEV para los problemas de elasticidad lineal estática y de Poisson en dos dimensiones. La librería también permite la resolución de estos problemas mediante el MEF usando elementos triangulares de tres nodos y elementos cuadriláteros de cuatro nodos. `VEMLab` es un proyecto de código abierto y libre que está disponible para su descarga desde el sitio http://camlab.cl/research/software/vemlab/.

4.1. Instrucciones de uso para la librería `VEMLab`

Para realizar una simulación se debe preparar una función principal que al ser ejecutada la iniciará y la dirigirá hasta su conclusión. En la carpeta “test” se incluyen algunos ejemplos de funciones principales.

La carpeta “test/mesh_files” posee varios archivos de texto que contienen la información de mallas de prueba. Estos archivos de texto se leen desde las funciones principales que están contenidas en la carpeta “test”. Para generar nuevas mallas, se deben utilizar las siguientes funciones que se encuentran en la carpeta “mesher”:

- `create_polygonal_mesh.m` para elementos poligonales.
- `create_quadrilateral_mesh.m` para elementos cuadriláteros de cuatro nodos.

- `create_triangular_mesh.m` para elementos triangulares de tres nodos.

Estas funciones crean los archivos de texto que contienen la información de las mallas y los guarda en la carpeta "test/mesh_files", quedando disponibles para ser leídos desde las funciones principales.

En la función principal se debe especificar el método que se desea utilizar en la simulación. Esto se realiza mediante la variable `vemlab_method`. Por ejemplo, para resolver utilizando el MEV, esta variable se fija como `vemlab_method='VEM2D'`. Para resolver con el MEF, se puede utilizar `vemlab_method='FEM2DQ4'` para elementos cuadriláteros de cuatro nodos o `vemlab_method='FEM2DT3'` para elementos triangulares de tres nodos. Las mallas de elementos cuadriláteros y triangulares son instancias particulares de elementos poligonales, por lo que pueden ser utilizadas para resolver problemas con el MEV cuando se especifica `vemlab_method='VEM2D'`. Sin embargo, las mallas poligonales de elementos de más de tres lados no pueden ser utilizadas cuando se especifica `vemlab_method='FEM2DT3'`, y las de tres o más de cuatro lados no pueden ser utilizadas cuando se especifica `vemlab_method='FEM2DQ4'`.

Antes de comenzar la simulación es importante especificar las opciones para los gráficos y los archivos de salida. Las opciones se deben activar o desactivar en la función `plot_and_output_options.m` que está en la carpeta "config".

Luego de que la simulación ha concluido, los archivos de salida del programa quedan guardados en la carpeta "test/output_files". Dentro de esta carpeta existen tres subcarpetas que contienen diferentes archivos de salida. La carpeta "GiD" contiene archivos de salida para ser leídos en el postprocesador de GiD (https://www.gidhome.com/), la carpeta "VTK" contiene archivos de salida que pueden ser leídos en el visualizador VTK (https://www.vtk.org/) o en el visualizador de ParaView (https://www.paraview.org/), y la carpeta "txt" contiene archivos de salida en formato de texto.

4.2. Test de la parcela en desplazamientos

Este test consiste en la solución de un problema de elasticidad lineal estática con $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ y condiciones de contorno esenciales (Dirichlet) $\boldsymbol{g} = [x_1 \quad x_1 + x_2]^{\mathsf{T}}$ impuestas a lo largo de todo el contorno de un dominio cuadrado unitario. Esto resulta en que $\boldsymbol{g}$ es también la solución exacta dentro del dominio. Se considera un estado de deformación plana con los siguientes parámetros para el material: $E_Y = 1 \times 10^7$ psi y $\nu = 0{,}3$. Para resolver este problema con el programa `VEMLab`, se utiliza la función `linear_patch_test_linelast2d.m` que se encuentra en la carpeta "test". La malla poligonal y los resultados del MEV para este problema se muestran en la Figura 2. Los valores de la norma L^2 relativa del error y la seminorma H^1 relativa del error que se obtienen para la malla que se muestra en la Figura 2(a) son $2{,}5493 \times 10^{-16}$ y $1{,}3766 \times 10^{-15}$, respectivamente. Por lo tanto, tal como predice la teoría, la solución del MEV coincide (dentro de la precisión de máquina) con la solución exacta.

4.3. Convergencia numérica

A continuación se estudia la convergencia numérica del MEV. Para ello se considera una viga en voladizo de espesor unitario sometida a una carga parabólica P en uno de sus extremos. La Figura 3 ilustra la geometría y las condiciones de borde. Se asume un estado de deformación plana. Las condiciones de borde esenciales en el extremo empotrado se aplican de acuerdo a la solución analítica dada por Timoshenko y Goodier [29]:

$$
\begin{aligned}
u_x &= -\frac{Py}{6\overline{E}_Y I}\left((6L-3x)x + (2+\overline{\nu})y^2 - \frac{3D^2}{2}(1+\overline{\nu})\right),\\
u_y &= \frac{P}{6\overline{E}_Y I}\left(3\overline{\nu}y^2(L-x) + (3L-x)x^2\right),
\end{aligned}
$$

donde $\overline{E}_Y = E_Y / \left(1-\nu^2\right)$ con módulo de Young $E_Y = 1 \times 10^7$ psi, y $\overline{\nu} = \nu / (1-\nu)$ con coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}3$; el largo de la viga es $L = 8$ in., el alto de la viga es $D = 4$ in., e I es el segundo momento de área de la sección de la viga. La carga total en el contorno natural es $P = -1000$ lbf.

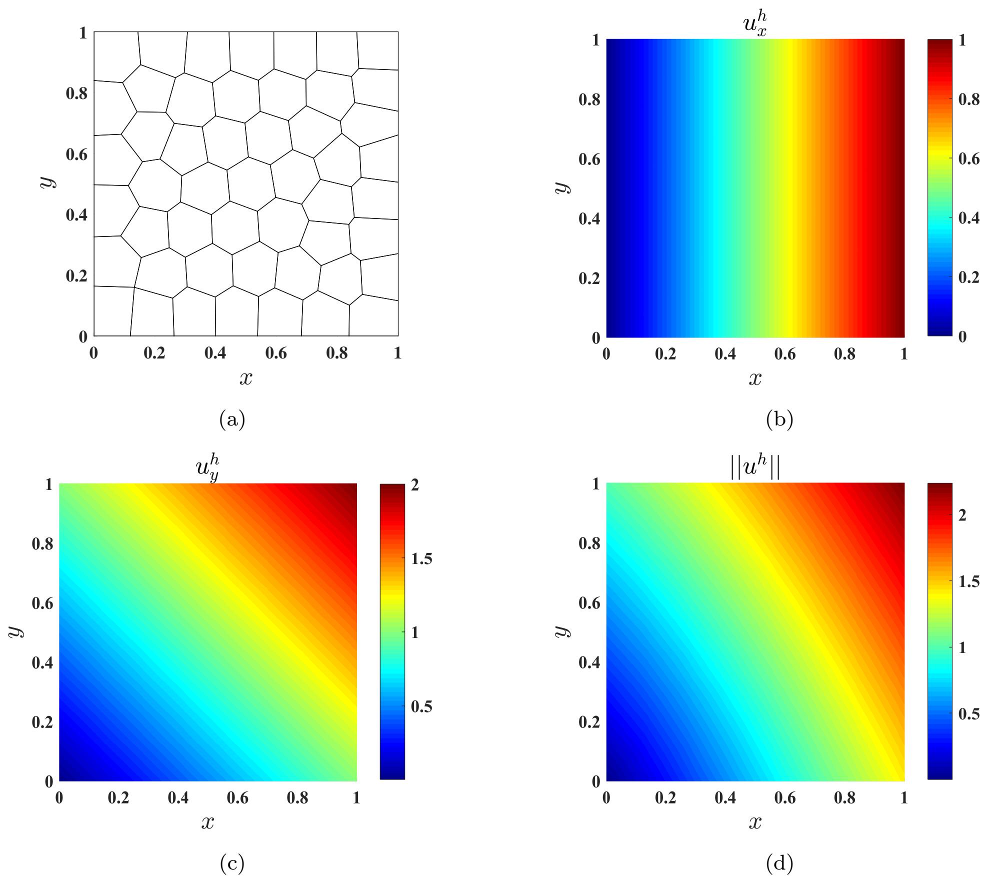


Figura 2: Solución del MEV para el test de la parcela en desplazamientos usando el programa `VEMLab`. (a) Malla de elementos poligonales, (b) desplazamiento horizontal, (c) desplazamiento vertical, y (d) norma del desplazamiento. La norma L^2 relativa del error es $2{,}5493 \times 10^{-16}$ y la seminorma H^1 relativa del error es $1{,}3766 \times 10^{-15}$.

Las correspondientes deformaciones exactas son:

$$\varepsilon_x = -\frac{P(L-x)y}{\bar{E}_Y I},$$
$$\varepsilon_y = \frac{\bar{\nu} P(L-x)y}{\bar{E}_Y I},$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{P(D^2/4 - y^2)}{4I\mu},$$

donde $\mu = E_Y/(2(1+\nu))$ es el módulo de corte. Los esfuerzos exactos son

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I},$$
$$\sigma_y = 0,$$
$$\sigma_{xy} = \frac{P(D^2/4 - y^2)}{2I}.$$

Cabe destacar que la carga parabólica se aplica usando la fórmula para σ_{xy}.

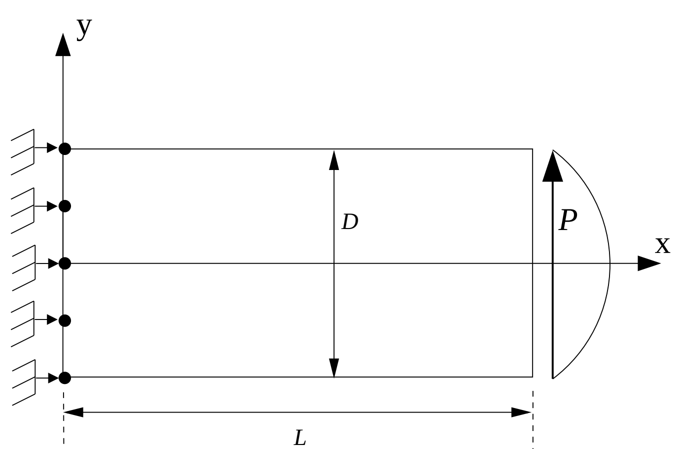


Figura 3: Modelo geométrico y condiciones de borde para el problema de la viga en voladizo.

Para resolver este problema con `VEMLab`, se utiliza la función `cantilever_beam_linelast2d.m` que se encuentra en la carpeta "test". La malla poligonal y los resultados del MEV para los desplazamientos se muestran en la Figura 4.

Se estudia la convergencia del MEV en el problema de la viga en voladizo y su desempeño se compara con la solución del MEF. Para el MEF se utiliza el elemento triangular de tres nodos ($T3$). El desempeño de los dos métodos se comparan en la Figura 5, donde tanto la seminorma H^1 relativa del error como el tiempo de CPU normalizado (o costo computacional) son graficados como función del número de grados de libertad (DOF). El tiempo de CPU normalizado se define como la razón entre el tiempo de CPU de un modelo particular analizado y el máximo tiempo de CPU para cualquiera de los modelos analizados. De la Figura 5 se observa que ambos métodos entregan la tasa de convergencia óptima (pendiente de la recta igual a 1) para la seminorma H^1 relativa del error a medida que la malla se refina (i.e., a medida que aumentan los grados de libertad total de la malla). También se observa que para igual número de grados de libertad, la exactitud y costo computacional son similares.

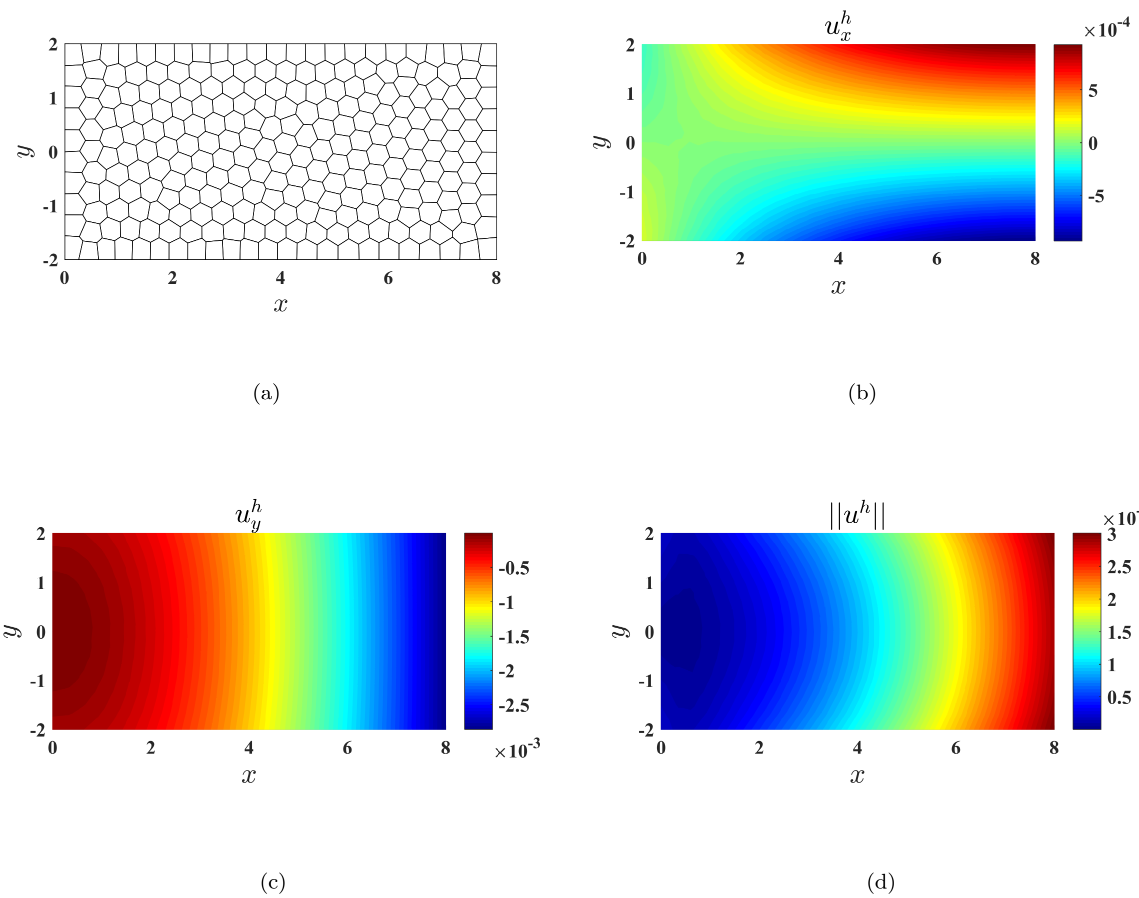
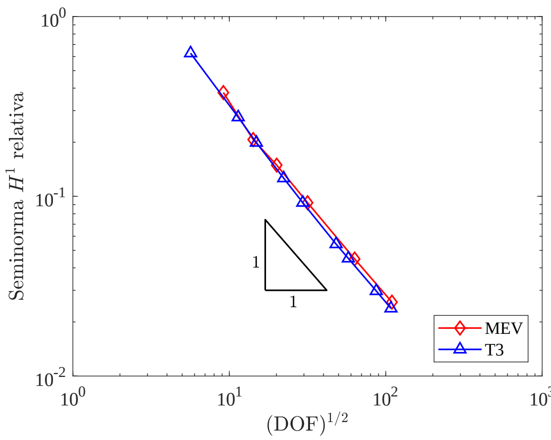
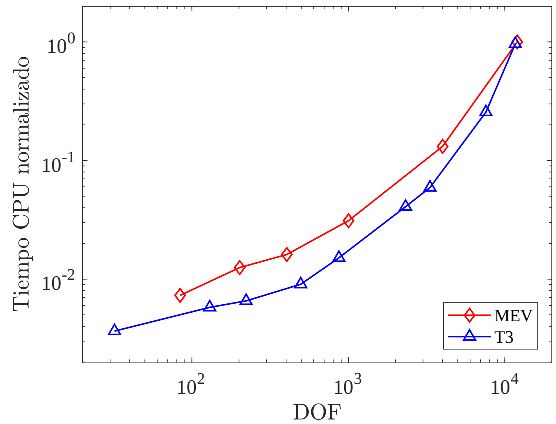


Figura 4: Solución del MEV para el problema de la viga en voladizo usando el programa `VEMLab`. (a) Malla poligonal, (b) desplazamiento horizontal, (c) desplazamiento vertical, y (d) norma del desplazamiento.



(a)



(b)

Figura 5: Comparación del desempeño entre el MEV y el MEF (triángulo de tres nodos ($T3$)) para el problema de la viga en voladizo. (a) Seminorma H^1 relativa del error como una función del número de grados de libertad y (b) tiempo de CPU normalizado como una función del número de grados de libertad.

Referencias

[1] M. Arroyo and M. Ortiz. Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 65(13):2167–2202, 2006.

[2] E. Artioli, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, and E. Sacco. Arbitrary order 2d virtual elements for polygonal meshes: part i, elastic problem. *Comput. Mech.*, 60(3):355–377, 2017.

[3] I. Babuška, U. Banerjee, J. E. Osborn, and Q. L. Li. Quadrature for meshless methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 76(9):1434–1470, 2008.

[4] I. Babuška, U. Banerjee, J. E. Osborn, and Q. Zhang. Effect of numerical integration on meshless methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198(37–40):2886–2897, 2009.

[5] L. Beirão da Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, and L.D. Marini. The Hitchhiker's Guide to the Virtual Element Method. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1:199–214, 2013.

[6] L. Beirão da Veiga, F. Brezzi, and L.D. Marini. Virtual elements for linear elasticity problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51(2):794–812, 2013.

[7] L. Beirão da Veiga, F. Brezzi, L.D. Marini, and A. Russo. The Hitchhiker's Guide to the Virtual Element Method. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 24(08):1541–1573, 2014.

[8] L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, and D. Mora. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 295:327–346, 2015.

[9] L. Beirão da Veiga and G. Manzini. A virtual element method with arbitrary regularity. *IMA J. Numer. Anal.*, 34(2):759–781, 2014.

[10] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu. Element-free Galerkin methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 37(2):229–256, 1994.

[11] A. Cangiani, G. Manzini, A. Russo, and N. Sukumar. Hourglass stabilization and the virtual element method. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 102(3–4):404–436, 2015.

[12] J. S. Chen, C. T. Wu, S. Yoon, and Y. You. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 50(2):435–466, 2001.

[13] J. Dolbow and T. Belytschko. Numerical integration of Galerkin weak form in meshfree methods. *Comput. Mech.*, 23(3):219–230, 1999.

[14] Q. Duan, X. Gao, B. Wang, , X. Li, H. Zhang, T. Belytschko, and Y. Shao. Consistent element-free Galerkin method. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 99(2):79–101, 2014.

[15] Q. Duan, X. Gao, B. Wang, X. Li, and H. Zhang. A four-point integration scheme with quadratic exactness for three-dimensional element-free Galerkin method based on variationally consistent formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 280:84–116, 2014.

[16] Q. Duan, X. Li, H. Zhang, and T. Belytschko. Second-order accurate derivatives and integration schemes for meshfree methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 92(4):399–424, 2012.

[17] A. Francis, A. Ortiz-Bernardin, S. P. A. Bordas, and S. Natarajan. Linear smoothed polygonal and polyhedral finite elements. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 109(9):1263–1288, 2017.

[18] A.L. Gain, C. Talischi, and G.H. Paulino. On the virtual element method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 282:132–160, 2014.

[19] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc, Mineola, NY, 2000.

[20] G. Manzini, A. Russo, and N. Sukumar. New perspectives on polygonal and polyhedral finite element methods. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 24(08):1665–1699, 2014.

[21] A. Ortiz, M. A. Puso, and N. Sukumar. Maximum-entropy meshfree method for compressible and near-incompressible elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199(25–28):1859–1871, 2010.

[22] A. Ortiz, M. A. Puso, and N. Sukumar. Maximum-entropy meshfree method for incompressible media problems. *Finite Elem. Anal. Des.*, 47(6):572–585, 2011.

[23] A. Ortiz-Bernardin, J. S. Hale, and C. J. Cyron. Volume-averaged nodal projection method for nearly-incompressible elasticity using meshfree and bubble basis functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 285:427–451, 2015.

[24] A. Ortiz-Bernardin, M. A. Puso, and N. Sukumar. Improved robustness for nearly-incompressible large deformation meshfree simulations on Delaunay tessellations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 293:348–374, 2015.

[25] A. Ortiz-Bernardin, A. Russo, and N. Sukumar. Consistent and stable meshfree Galerkin methods using the virtual element decomposition. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 112(7):655–684, 2017.

[26] G. Strang and G. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press, MA, second edition, 2008.

[27] C. Talischi and G. H. Paulino. Addressing integration error for polygonal finite elements through polynomial projections: A patch test connection. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 24(08):1701–1727, 2014.

[28] C. Talischi, A. Pereira, I. F. M. Menezes, and G. H. Paulino. Gradient correction for polygonal and polyhedral finite elements. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 102(3–4):728–747, 2015.

[29] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of Elasticity.* McGraw-Hill, NY, third edition, 1970.