



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

DESARROLLO DE UN MÉTODO DE INTEGRACIÓN NODAL PARA PROBLEMAS  
EN MECÁNICA DE SÓLIDOS LINEAL Y NO LINEAL BASADO EN LA  
DESCOMPOSICIÓN DEL ELEMENTO VIRTUAL

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA MECÁNICA

RODRIGO ALFONSO SILVA VALENZUELA

PROFESOR GUÍA:  
ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
RUBÉN FERNÁNDEZ URRUTIA  
ROGER BUSTAMANTE PLAZA  
DIEGO CELENTANO

Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto ANID/FONDECYT No. 1221325

SANTIAGO DE CHILE  
2025

**RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE:**  
**DOCTOR EN INGENIERÍA MECÁNICA**  
**POR: RODRIGO ALFONSO SILVA VALENZUELA**  
**FECHA: 2025**  
**PROF. GUÍA: ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN**

DESARROLLO DE UN MÉTODO DE INTEGRACIÓN NODAL PARA PROBLEMAS  
EN MECÁNICA DE SÓLIDOS LINEAL Y NO LINEAL BASADO EN LA  
DESCOMPOSICIÓN DEL ELEMENTO VIRTUAL

Se propone un método de integración nodal de la forma débil de Galerkin basada en desplazamiento utilizando el concepto de ponderación nodal y la descomposición del elemento virtual para mecánica de sólidos lineal y no lineal para problemas incompresible y casi incompresibles bidimensionales. La característica nodal se basa en la ponderación de la deformación de las celdas de integración asociado a cada nodo, mientras que la integración se realiza mediante la descomposición del elemento virtual. En la formulación con deformaciones infinitesimales, la ponderación es basada en el tensor de deformación infinitesimal, mientras que para deformaciones finitas, se basa en el tensor gradiente de deformación. Para el procedimiento de ponderación de deformaciones, se construye un operador de ponderación nodal utilizando una generalización del enfoque de deformación uniforme basada en nodos para elementos finitos. A este nuevo esquema se denomina elementos virtuales de deformación uniforme basada en nodos (*NVEM*, por sus siglas en inglés).

Una característica de *NVEM* heredada de la ponderación nodal, es que todas las variables son variables nodales, al igual que los desplazamientos. Por ejemplo, variables como la deformación plástica acumulada, que en elementos finitos se evalúan y almacenan en los puntos de integración, y que es necesario almacenarlas en los modelos de material dependientes del historial, en *NVEM* son almacenadas directamente en los nodos. El esquema, al heredar las virtudes del método del elemento virtual, las cuales son trabajar con mallas con celdas de lados arbitrarios y una menor sensibilidad a la distorsión de la malla, junto con el concepto de integración nodal que evita la necesidad de remapear información de la malla antigua a la malla nueva, lo haría idóneo para trabajar con simulaciones cuyo dominio está sometido a grandes distorsiones que requieran remallado.

A través de varios problemas de referencia bidimensionales en elasticidad lineal, elastoplasticidad infinitesimal, hiperelasticidad, y elastoplasticidad finita, se estudió el esquema propuesto. El esquema, a través de los experimentos numéricos revisados, demostró ser convergente y estable.

**ABSTRACT OF THE THESIS TO OBTAIN THE DEGREE OF:**  
PHD IN MECHANICAL ENGINEERING  
**BY:** RODRIGO ALFONSO SILVA VALENZUELA  
**DATE:** 2025  
**SUPERVISOR:** ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN

DEVELOPMENT OF A NODAL INTEGRATION METHOD FOR LINEAR AND  
NONLINEAR SOLID MECHANICS PROBLEMS BASED ON THE DECOMPOSITION  
OF THE VIRTUAL ELEMENT

A nodal integration scheme for the weak form of the displacement-based Galerkin method is proposed, using the concept of nodal average and the virtual element decomposition for linear and nonlinear solid mechanics problems in two-dimensional incompressible and nearly incompressible settings. The average procedure on the deformation of the cells surrounding the node gives the method its nodal character, while integration is carried out through the decomposition of the virtual element. For small strains, the weighting is based on the infinitesimal strain tensor, whereas for finite strains, it is based on the strain gradient tensor. For the nodal strain average procedure, a nodal averaging operator is constructed using a generalization of the node-based uniform strain approach for finite elements. This new scheme is referred to as the Node-Based Uniform Strain Virtual Element Method (NVEM).

A feature of NVEM, inherited from the nodal averaging procedure, is that all variables are nodal variables, just like displacements. For example, variables such as accumulated plastic strain, which in finite elements are evaluated and stored at integration points, and which need to be stored in history-dependent material models, are directly stored at the nodes in NVEM. The scheme also inherits some notable characteristics of the virtual element method such as working with meshes with cells of arbitrary number of edges and reduced sensitivity to mesh distortion. This along with with the nodal integration concept that avoids the need of remapping information from the old mesh to the new mesh, makes it suitable for simulations where the domain undergoes large distortions that require remeshing.

Through several two-dimensional benchmark problems in linear elasticity, infinitesimal elastoplasticity, hyperelasticity, and finite elastoplasticity, the proposed scheme was studied. The scheme, through the reviewed numerical experiments, proved to be convergent and stable.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes generales . . . . .	1
1.2. Hipótesis . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.3.1. Objetivo general . . . . .	3
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	3
1.4. Contribuciones originales . . . . .	3
1.5. Estructuración de la tesis . . . . .	4
<b>2. Antecedentes</b>	<b>5</b>
2.1. Métodos de integración nodal . . . . .	5
2.2. Descomposición del elemento virtual . . . . .	8
<b>3. Método de Integración nodal</b>	<b>10</b>
3.1. Ecuaciones de gobierno . . . . .	10
3.1.1. Forma fuerte . . . . .	10
3.1.2. Forma débil . . . . .	11
3.1.3. Modelos constitutivos . . . . .	12
3.1.4. Ecuaciones que gobiernan el caso infinitesimal . . . . .	14
3.2. Método del elemento virtual . . . . .	16
3.3. Discretización y descomposición de la forma débil . . . . .	23
3.3.1. Forma débil MEV para mecánica de sólidos lineal . . . . .	24
3.3.2. Forma débil MEV para mecánica de sólidos no lineal . . . . .	24
3.4. Operador ponderación nodal . . . . .	25
3.5. Implementación . . . . .	26
3.5.1. Implementación deformaciones infinitesimales . . . . .	26
3.5.2. Implementación deformaciones finitas . . . . .	32
3.5.3. Vector de fuerzas externas . . . . .	36
3.5.4. Matriz de estabilidad . . . . .	37
3.5.5. Matrices nodales . . . . .	41
3.5.6. Simetría en el eje . . . . .	43
3.5.7. Matriz de masa e integración temporal . . . . .	45
<b>4. Ejemplos numéricos y análisis</b>	<b>47</b>
4.1. Elasticidad lineal . . . . .	47
4.1.1. Viga en voladizo . . . . .	47

4.1.2.	Placa con orificio . . . . .	48
4.1.3.	Cilindro de pared gruesa . . . . .	52
4.2.	Elastoplasticidad infinitesimal . . . . .	52
4.2.1.	Membrana de Cook . . . . .	52
4.2.2.	Placa elastoplastica perforada . . . . .	56
4.2.3.	Cilindro de pared gruesa . . . . .	56
4.2.4.	Prueba de punzón de Prandtl . . . . .	57
4.3.	Hiperelasticidad . . . . .	61
4.3.1.	Membrana de Cook . . . . .	61
4.3.2.	Compresión plana bajo desplazamiento . . . . .	61
4.3.3.	Compresión plana bajo presión . . . . .	66
4.3.4.	Indentación sin fricción de un bloque . . . . .	66
4.3.5.	Columna bajo oscilación libre . . . . .	69
4.3.6.	Impacto de una esfera elástica . . . . .	69
4.4.	Elastoplasticidad finita . . . . .	72
4.4.1.	Membrana de Cook . . . . .	72
4.4.2.	Indentación sin fricción de un bloque . . . . .	73
4.4.3.	Compresión plana bajo desplazamiento . . . . .	75
4.4.4.	Contacto entre dos bloques . . . . .	75
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>80</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>82</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes generales

Al discretizar las variables en el método de Galerkin se puede tomar un enfoque con malla y sin malla. En el enfoque con malla las funciones de base son asociadas a los elementos de la malla, y en el enfoque sin malla las funciones de base son construidas solo con los nodos de la malla del dominio de análisis. El enfoque con malla, como el método de los elementos finitos, tiene como desventaja la sensibilidad de los resultados ante la distorsión excesiva de la malla cuando el dominio es sometido a deformaciones extremas, provocando pérdida de precisión en el análisis [1]. Debido a esto, es necesario rehacer la malla una o más veces en el curso de un análisis, aumentando los tiempos de computo. En cambio, en los métodos sin malla, las funciones de base al ser construidas solo con los nodos son menos sensibles a la pérdida de precisión debido a la distorsión de la malla [2, 3, 4], necesitando menos remallado en caso de ser requerido.

La forma débil en cualquiera de estos dos enfoques de discretización debe ser integrada sobre el dominio. La técnica de integración más simple se realiza mediante cuadratura sobre los elementos de la malla, que para los métodos sin malla, solo es utilizada para la integración. En el caso de los métodos sin malla debido a la naturaleza de las funciones de base, las cuales son no polinomiales y no coinciden con el dominio de integración, son fuentes de error. Esto se debe a que no son integrables exactamente, lo que puede conducir problemas de convergencia [5]. Esto se puede solucionar aumentando los puntos de integración, pero incrementando el costo computacional [6]. Con este esquema de integración, tanto en el enfoque con malla y sin malla, durante la simulación los desplazamientos se evalúan y almacenan en los nodos, pero variables como los esfuerzos, deformaciones, deformación plástica acumulada, etc se evalúan y almacenan en puntos de integración dentro de los elementos. En el remallado, y para simulaciones que dependen del historial, se requiere que se transfiera toda la información de la malla vieja a la nueva antes de que pueda continuar el análisis [7, 8]. En el proceso de transferencia de información se debe tener especial cuidado, ya que este es otra fuente de error [9].

Otro enfoque para integrar la forma débil es la integración nodal, produciendo un método de partículas donde los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos son almacenados directa-

mente en los nodos. Este enfoque de integración nodal o de partícula es deseable debido a su eficiencia computacional por disminuir la cantidad de evaluaciones y guardar la información directamente en los nodos. Esto último evita el remapeo de información [10] desde los puntos de integración cuando se utilizan técnicas de remallado debido a la distorsión excesiva de la malla. Por otro lado, estos métodos de integración nodal conducen a inestabilidades numéricas debido a la subintegración que se manifiesta en modos espurios y grandes oscilaciones en la solución [11]. Debido a esto, se han realizado intentos para estabilizar los métodos de integración nodal [12, 13, 14, 15, 6].

Uno de los primeros esquemas de integración nodal fue propuesto por Dohrmann et al. [15], en donde la deformación nodal es obtenida ponderando las deformaciones de los elementos calculada mediante la formulación de los elementos finitos asociado a dicho nodo. Posteriormente Silva-Valenzuela et al. [6] propusieron un esquema de integración nodal sin malla, en el cual utilizaron el marco teórico del método del elemento virtual [16] para estabilizar el esquema, en donde la matriz de rigidez se descompone en una parte que provee consistencia y en una parte que provee estabilidad, resultando un método de integración nodal consistente y estable. Este esquema fue desarrollado para mecánica de sólidos en cinemática de pequeñas deformaciones. Cabe destacar que una de las ventajas de VEM es su menor sensibilidad a la distorsión de la malla [17] y la posibilidad de utilizar elementos de geometría arbitraria [16]. Esta característica, junto con un enfoque de integración nodal son idóneos para simulaciones con gran distorsión en la geometría del dominio junto con técnicas de remallado que se puede manejar con mayor flexibilidad si el análisis permite la presencia de elementos con geometrías generales.

En este trabajo doctoral se propone un método de integración nodal basado en la integración de la forma débil de Galerkin utilizando la descomposición del elemento virtual [16] y el enfoque de ponderación nodal de Dohrmann et al [15] para Mecánica de Sólidos no lineal y lineal para cinemática de pequeñas y grandes deformaciones. Para el estudio del método se implementará en problemas de referencia en mecánica de sólidos lineal, no lineal, estáticos, dinámicos y de contacto.

Parte de este trabajo doctoral ya ha sido publicado en dos artículos. Los resultados de la sección 4.1 fue publicada en [18], al igual que la sección 4.2 [19]. Otras publicaciones, basadas en los resultados de la sección 4.3 y 4.4, están actualmente en preparación.

## 1.2. Hipótesis

- Un método de partícula basado en la descomposición del elemento virtual es un esquema convergente y estable para simulaciones no lineales con pequeñas y grandes deformaciones para materiales compresibles y casi-incompresibles.
- El esquema basado en la descomposición del elemento virtual y ponderación nodal permite simular problemas estáticos y dinámicos con contacto utilizando elementos con lados arbitrarios.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

- Desarrollar e implementar un esquema de integración nodal convergente y estable para problemas de mecánica de sólidos lineal y no lineal utilizando la descomposición del elemento virtual.

### 1.3.2. Objetivos específicos

- Desarrollar un esquema numérico de integración nodal en pequeñas deformaciones utilizando un enfoque de ponderación nodal de la deformación para la descomposición del elemento virtual.
- Extender el enfoque de ponderación nodal para la descomposición del elemento virtual a la cinemática de grandes deformaciones.
- Implementar modelos constitutivos hiperelásticos y elastoplásticos, en pequeñas y grandes deformaciones, utilizando ponderación nodal y la descomposición del elemento virtual.
- Implementar el esquema de integración nodal para problemas estáticos, dinámicos, de contacto, y con simetría en el eje.
- Estudiar la convergencia y estabilidad del esquema desarrollado mediante ejemplos numéricos de referencia estándar.

## 1.4. Contribuciones originales

La principal contribución de este trabajo de tesis es la formulación de un esquema de bajo orden basado en desplazamientos para la simulación de problemas en mecánica de sólidos lineal y no lineal, para materiales compresibles y casi incompresibles, utilizando mallas con elementos de lados arbitrarios, donde las variables de estado son almacenadas directamente en los nodos.

El esquema propuesto, al ser nodal, almacena las variables de forma directa en los nodos, a diferencia de los métodos con integración numérica estándar. Esto permite un ahorro en el costo computacional, específicamente en modelos de material que dependen del historial que requieren almacenar información del paso de tiempo anterior, como la deformación plástica acumulada. También se evita la necesidad de remapetar la información desde una malla distorsionada a una malla nueva, en el caso que sea necesario los remallados. Por otro lado, es capaz de evitar el bloqueo volumétrico cuando se modelan materiales casi incompresibles basando su formulación solo en desplazamiento, esto al utilizar estabilizaciones adecuadas para este propósito. Otra contribución original es la formulación de la descomposición del elemento virtual para la aproximación de simetría en el eje para deformaciones finitas.

## 1.5. Estructuración de la tesis

El resto de la tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2, se presentan los métodos de integración nodal basados en la forma débil de Galerkin. La segunda parte del capítulo 2 esta dedicado a una revisión general del método del elemento virtual.

En el capítulo 4 se enfoca en la formulación del esquema. Se comienza plateando las ecuaciones de gobierno para deformaciones finitas, su forma débil y los modelos constitutivos hipereásticos y elastoplásticos. Luego, se plantea las ecuaciones de gobierno infinitesimales como un caso especial del caso finito, con sus respectivos modelos constitutivos. El capítulo sigue con la formulación del método del elemento virtual para definir el operador de proyección que es utilizado en la forma débil planteada en la subsección siguiente del mismo capítulo. Posteriormente, se define el operador de ponderación nodal. En la última sección del capítulo 3 se construyen las matrices del esquema para su implementación, tanto para los casos lineales y no lineales, las matrices para aproximación de simetría en el eje, y la matriz de masa para problemas dinámicos.

El capítulo 5 presenta los ejemplos numéricos bidimensionales implementados para problemas elásticos lineales, elastoplásticos infinitesimales, hiperelásticos, y elastoplásticos con deformaciones finitas. En elasticidad lineal se implementa una viga en voladizo, una placa con orificio y el problema de un cilindro de pared gruesa. En elastoplasticidad infinitesimal se implementa la membrana de Cook, una placa perforada, el problema de un cilindro de pared gruesa, y la prueba del punzón de Prandtl. En hiperelasticidad se implementa la membrana de Cook, compresión plana bajo desplazamiento, compresión plana bajo presión, indentación sin fricción de un bloque, una columna bajo oscilación libre, y un problema de impacto de una esfera elástica. Y para elastoplasticidad finita se implementa la membrana de Cook, indentación sin fricción de un bloque, compresión plana bajo desplazamiento, y un problema de contacto entre dos bloques. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones y los principales hallazgos de este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Antecedentes

### 2.1. Métodos de integración nodal

Como se mencionó anteriormente, es preferible el método de integración nodal donde la información es evaluada y almacenada directamente en los nodos. Estos esquemas simplifican la estructura de datos y ahorran memoria cuando se tratan problemas no lineales, especialmente los que dependen del historial, en donde la componente de esfuerzo del paso de cálculo anterior debe mantenerse en la memoria. Más precisamente, porque el número total de nodos es generalmente mucho menor que el número total de puntos de integración, entonces el método de integración nodal ahorra tiempo de cálculo y requiere menos memoria para evaluar las ecuaciones. Debido a los problemas involucrados en integrar de forma directa en los nodos [11], se han realizado intentos para desarrollar esquemas de integración nodal o métodos de partículas estables. Entre los métodos de integración nodal basados en la forma débil de Galerkin las principales diferencias entre los esquemas se basa en cómo estabilizan el método (no siempre) debido a la deficiencia de rango, en cómo calculan el tensor gradiente de deformación y si son basados en malla o sin malla. La versión de la forma bilineal de Galerkin para la integración nodal es la siguiente:

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_{a=1}^N \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{v}^h) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}^h) V_a \right] + \text{estabilizador}, \quad (2.1)$$

donde  $V_a$  es el área nodal representativa, y el término estabilizador sumado a la forma débil no siempre esta presente. Las diferentes opciones para calcular la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}_a$  en el nodo, para cinemática de pequeñas deformaciones, son

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}^h) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_a) + \nabla^\top \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_a)), \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}^h) = \frac{1}{2V_a} \int_{\partial\Omega_a} (\mathbf{u}^h \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}^h) d\mathbf{s}, \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}^h) = \frac{1}{V_a} \sum_{c \in T_a} V_a \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(\mathbf{u}^h), \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{x}_a$  es la coordenada del nodo,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$  es la deformación de cada elemento  $c$  asociado al nodo  $a$ , y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al borde de la celda de integración.

Beissel et al. [11] propusieron por primera vez un procedimiento para estabilizar la integración nodal en el método de Galerkin sin malla (EFG-MLS). Desarrollaron un método de deformación nodal en donde utilizaron un término estabilizador basado en el cuadrado del residual de la ecuación de equilibrio con un coeficiente estabilizador como penalizador. Encontraron que se pierde precisión en algunos casos debido al término estabilizador.

Bonet et al. [20] presentaron un esquema en donde la presión nodal ponderada es calculada mediante la definición de volúmenes nodales utilizando elementos tetraedros, evitando el bloqueo volumétrico. Posteriormente Dohrmann et al. [15] extendieron el trabajo realizado por Bonet et al. [20], pero ponderaron la deformación con (2.4), generando de esta forma un esquema de integración nodal basado en la ponderación de cada elemento triángulo o tetraedro  $c$  asociado a un nodo (NIFEM). De igual forma, obtuvieron un esquema en donde se evita los problemas del bloqueo volumétrico para materiales casi incompresibles, pero con la presencia de inestabilidades de modos espurios de baja energía [15]. Posteriormente, Pusso et al. [21] demostró analíticamente que la estabilidad no está asegurada a medida que se refina la malla. Luego, tomando esta idea de ponderación nodal, Bonet et al. [22] extendió la formulación para el régimen de cinemática no lineal con grandes deformaciones.

Para el método de partículas de reproducción kernel (RKPM), Chen et al. [12] desarrollaron un esquema de integración nodal conforme estabilizado (SNCI), donde propusieron estabilizar suavizando la deformación utilizando (2.3) sobre los bordes de la celda de Voronoi (Figura 2.1) y para la convergencia introdujeron una restricción de integración, pasando el test de la parcela lineal. Posteriormente Chen et al. [23] extendió SNCI para problemas no lineales. Respecto a la estabilidad, se demostró analíticamente [24, 21] que la estabilidad de SNCI no está asegurada a medida que se refina la malla.

Pusso et al. [25], modificó el esquema propuesto por Dohrmann et al. [15] adicionando un término estabilizador a la forma débil basado en la deformación nodal ponderada y la deformación de los elementos asociados a un nodo junto con un parámetro estabilizador artificial. Se demostró analítica y numéricamente que el esquema es consistente y estable para problemas compresibles. Adicionalmente, se probó para problemas plásticos o casi incompresibles funcionando bien en algunos casos [25].

Liu et al. [13] desarrollaron un esquema de integración nodal para el método de interpolación de puntos radiales sin malla (NI-RPIM), para problemas de mecánica de sólidos. El esquema de integración nodal se basa en la expansión de series de Taylor de la matriz de rigidez, para entregar estabilidad. Esta técnica es similar a lo propuesto por Nagashima et al. [26] para su esquema de integración nodal, en donde la expansión la aplicó a la matriz de deformación en el método EFG con MLSM. Posteriormente, Duan et al. [27] encontraron que el esquema tiene un efecto estabilizador pobre, con oscilaciones espurias presentes.

Pusso et al. [21] analizó algunos métodos de integración nodal clásicos [20, 15, 12], y propuso una modificación al esquema de integración SCNI agregando un término de estabilización a la forma débil junto con parámetro artificial (MSCNI). Este término estabilizador esta basado en la integración de subceldas y es similar a la estabilización propuesta por Pusso

et al. [25].

Liu et al. [28] generalizó el trabajo de Dohrmann et al. [15] a polígonos con lados arbitrarios, generando un método de elementos finitos suavizados basado en nodos (NS-FEM), en donde la deformación se calcula utilizando (2.4) y (2.3) a la vez. Este esquema presentó inestabilidades de modos espurios de energía distinta de cero [29, 30, 31]. Debido a esto, se ha intentado estabilizar [29, 30] adicionando un término a la forma débil, similar a lo realizado por Beissel et al. [11] incluyendo también un coeficiente estabilizador artificial. Posteriormente Chen et al. [31] estabilizó el esquema expandiendo la deformación mediante series de Taylor.

Duan et al. [14] propusieron un esquema de integración nodal de segundo orden (QCNI) para el método de Galerkin sin malla (EFG-MLS) que puede pasar el test de la parcela cuadrático para problemas elastoestáticos y elastodinámicos. En este esquema (QCNI) calculan derivadas nodales corregidas que reemplazan a las originales. Esto es similar a los propuestos por Duan et al. [32], pero el desarrollo de QCNI se basa en el principio variacional de Hu-Washizu.

Hillman et al. [33] propusieron un esquema de integración nodal estabilizado para el método de reproducción de partículas de Kernel (RKPM) agregando un término estabilizador a la forma débil basado en la extrapolación de la aproximación en los nodos utilizando gradientes explícitos, sin uso de parámetros artificiales para la estabilización. Lograron un esquema convergente y estable para problemas lineales y no lineales.

Meng et al. [10] utilizaron un esquema de integración nodal para el método de los elementos finitos de partículas (N-PFEM), aplicándolo a la recesión de acantilados. Este esquema de integración nodal es basado en la ponderación de la deformación de los elementos asociados a un nodo, similar a lo realizado por Dohrmann et al. [15].

Silva-Valenzuela et al. [6] desarrollaron un esquema de integración nodal para el método de Galerkin sin malla utilizando las funciones de base de la máxima entropía. Se basaron en la descomposición del elemento virtual [16], en donde la matriz de rigidez se descompone en una matriz que entrega la consistencia y otra matriz que entrega la estabilidad, para problemas de mecánica de sólidos en cinemática de pequeñas deformaciones.

De los métodos de partícula basados en la forma débil de Galerkin revisados anteriormente, los esquemas sin malla poseen la desventaja que necesitan realizar la búsqueda de los nodos vecinos, aumentando el costo computacional. Mientras que los esquemas con mallas, o no pueden manejar elementos de forma arbitraria [15, 28] o su estabilización no esta incluida de forma natural y explícita en la matriz de rigidez [29, 30, 31]. El esquema propuesto, basado en la ponderación de Dohrmann et al. [15] y la descomposición del elemento virtual [16], produciría un método de integración nodal con malla con la flexibilidad de trabajar con mallas arbitrarias y poseer la estabilidad de forma explícita en la matriz de rigidez con un marco teórico sólido.

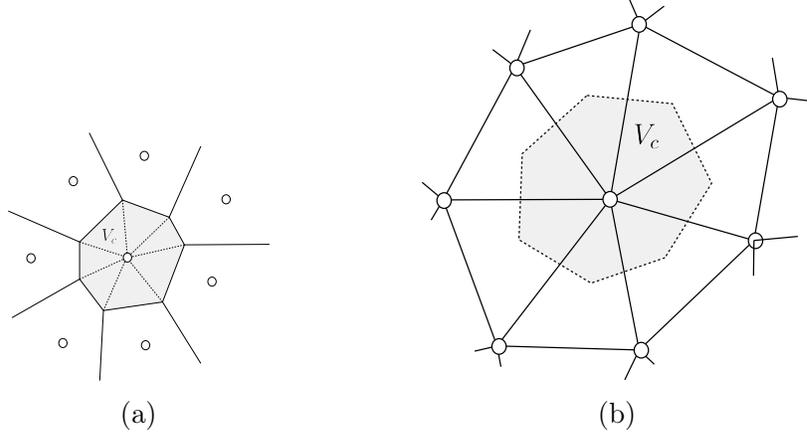


Figura 2.1: Celda de integración  $\Omega_a$  mostrada en gris utilizando (a) celda de Voronoi, y (b) triángulo de tres nodos. Las celdas además son subdivididas en subceldas  $\Omega_{a,c}$  con volumen  $V_c$ .

## 2.2. Descomposición del elemento virtual

El método de elementos virtuales (VEM) es una generalización del método de elementos finitos (FEM) a elementos politopales arbitrarios y tiene como objetivo calcular la forma débil exactamente, evitando errores de integración. Este método sigue un procedimiento similar a FEM, comenzado desde una forma débil y construye una forma débil local en el elemento politopal, lo que conduce a la matriz de rigidez del elemento y al vector de fuerza del elemento. Para esto, se define  $[\mathcal{P}(E)]^2$  como un espacio de desplazamiento lineales sobre un elemento  $E$  y  $[\mathcal{H}(E)]^2$  como el espacio de los términos adicionales no polinomiales sobre el elemento  $E$ . Por lo tanto, se define la aproximación de función de prueba y de peso, respectivamente, tal que  $\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \in [\mathcal{W}(E)]^2 = [\mathcal{P}(E)]^2 + [\mathcal{H}(E)]^2$ . Siguiendo el procedimiento estándar de VEM, se define el siguiente operador de proyección sobre el espacio de desplazamiento lineal:

$$\Pi : [\mathcal{W}(E)]^2 \rightarrow [\mathcal{P}(E)]^2, \quad \Pi \mathbf{p} = \mathbf{p} \quad \forall \mathbf{p} \in [\mathcal{P}(E)]^2, \quad (2.5)$$

que permite la división de la aproximación en su parte polinomial lineal y sus términos no polinomiales, respectivamente, de la siguiente manera

$$\mathbf{u}^h = \Pi \mathbf{u}^h + (\mathbf{u}^h - \Pi \mathbf{u}^h), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}^h = \Pi \mathbf{v}^h + (\mathbf{v}^h - \Pi \mathbf{v}^h). \quad (2.7)$$

Utilizando las descomposiciones anteriores, en la forma débil, la matriz de rigidez de un elemento se descompone en una matriz de consistencia ( $\mathbf{K}_E^c$ ) y una matriz de estabilidad ( $\mathbf{K}_E^s$ ):

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_E^c + \mathbf{K}_E^s. \quad (2.8)$$

El método fue diseñado para manejar discretizaciones politopales de forma arbitraria, que son particularmente convenientes para mallar geometrías complejas y resulta atractivo para simulaciones con grandes deformaciones, debido a que se ha demostrado que VEM es menos sensible a la distorsión de la malla [34, 35, 17].

El método del elemento virtual se ha aplicado a problemas de elasticidad lineal [36, 37, 38, 39], contacto [40, 41], termoplásticos [42], termoelásticos [43], deformaciones finitas elastoplásticas [44, 17], materiales anisotrópicos [45, 46], daño isotrópico con pequeñas deformaciones [47], sólidos viscoelásticos [48] y elastoplásticos [48, 49] para pequeñas deformaciones, y para materiales hiperelásticos [50, 51, 52]. Adicionalmente, VEM se ha aplicado a procesos industriales como el conformado de metales [53].

# Capítulo 3

## Método de Integración nodal

Para cumplir con los objetivos de esta tesis se utilizará el marco teórico del método del elemento virtual [16] y la ponderación nodal de la deformación, que fue originalmente introducida por Dorhmann et al. [15] para elementos finitos. Con lo anterior, se desarrollará e implementará el método de integración nodal en donde los desplazamientos, esfuerzos, deformaciones y otras variables de estado son almacenadas directamente en los nodos. La formulación, al igual que el método de los elementos finitos, parte de la versión integral de las ecuaciones de gobierno. Posteriormente se descompone la forma integral o débil mediante la descomposición del elemento virtual. Sobre la descomposición se discretiza los desplazamientos, para luego construir las matrices mediante la definición de un operador de ponderación nodal. Finalmente se construyen la versión de las matrices  $VEM$  y  $NVEM$  para la aproximación de simetría en el eje.

### 3.1. Ecuaciones de gobierno

#### 3.1.1. Forma fuerte

Se considera un cuerpo deformable que ocupa el dominio abierto  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  en la configuración de referencia que está limitado por la superficie unidimensional  $\Gamma$  cuya normal apuntando hacia el exterior es  $\mathbf{N}$ . Se considera que el contorno admite las descomposiciones  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  y  $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_t$ , donde  $\Gamma_u$  es el contorno esencial (o de Dirichlet) y  $\Gamma_t$  es el contorno natural (o de Neumann). El cierre del contorno del dominio es  $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \Gamma$ . La posición  $\mathbf{x}$  de un punto material que inicialmente se encontraba en  $\mathbf{X}$  está dada por el movimiento  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})$ , donde  $\mathbf{u}$  es el campo de desplazamiento definido como  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$  cuando el cuerpo se somete a las tracciones externas  $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{X}) : \Gamma_t \rightarrow \mathbf{R}^2$  y las fuerzas de cuerpo  $\mathbf{b}_r(\mathbf{X}) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Las condiciones de contorno esenciales (o de Dirichlet) impuestas son  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) : \Gamma_u \rightarrow \mathbf{R}^2$ . El problema de valor de frontera se lee como sigue: encontrar  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$  tal que

$$\text{Div } \mathbf{P}^\top + \mathbf{b}_r = 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma_u, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{N} = \hat{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma_t, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{P}$  es el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff dado por  $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ ,

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \chi(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (3.4)$$

es el tensor gradiente de deformación y  $\mathbf{S}$  es el segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff. El tensor de esfuerzo  $\mathbf{S}$  se calcula mediante

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}, \quad (3.5)$$

donde  $W = W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{F})$  es una función de energía de deformación almacenada (válida sólo para el caso elástico) y  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$  es el tensor de deformación derecho de Cauchy-Green.

### 3.1.2. Forma débil

En el método del elemento virtual, al igual que el método de los elementos finitos, su formulación parte desde una forma integral o débil de las ecuaciones de gobierno. Para este propósito se utiliza el método de los residuos ponderados. Sea  $\mathbf{v}$  una función de peso arbitraria, tal que  $\mathbf{v} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma_u\}$ . Para conseguir la forma débil se multiplica la ecuación de equilibrio por la función de peso y se integra sobre el dominio, luego el primer término se integra por partes, se aplica el teorema de la divergencia y se introduce las condiciones de tracción externa. Finalmente, la forma débil se plantea como: encontrar  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) \in \mathcal{V}$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell_b(\mathbf{v}) + \ell_t(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}(\mathbf{X}) \in \mathcal{W}, \quad (3.6)$$

con

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) : \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (3.7)$$

$$\ell_b(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \ell_t(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \quad (3.8)$$

donde  $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Sym}(\nabla_o \mathbf{v}^\top \mathbf{F})$ . Para encontrar (3.7) se utilizó  $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ , donde  $\mathbf{S}$  es el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff. Los espacios de desplazamientos continuos de prueba  $\mathcal{V}$  y de pesos  $\mathcal{W}$  se definen, respectivamente, como:

$$\mathcal{V} := \{ \mathbf{u}(\mathbf{X}) : \mathbf{u} \in [H^1(\bar{\Omega}) \cap C^0(\bar{\Omega})]^2, \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ sobre } \Gamma_u \},$$

$$\mathcal{W} := \{ \mathbf{v}(\mathbf{X}) : \mathbf{v} \in [H^1(\bar{\Omega}) \cap C^0(\bar{\Omega})]^2, \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma_u \},$$

donde  $[H^1(\bar{\Omega})]^2$  es el espacio de funciones de Sobolev con derivadas de primer orden cuadrado-integrables.

### 3.1.3. Modelos constitutivos

#### Hiperelasticidad

Los materiales hiperelásticos, durante el proceso de deformación, se modelan considerando que no presentan disipación de energía, lo que lo hacen independiente del historial de deformación, es decir, solo dependen de los valores actuales de la deformación. Se definen mediante una función de densidad energía almacenada  $W$ , que se utiliza para el cálculo de los esfuerzos. Existen varios modelos en la literatura, uno de los comúnmente utilizados en problemas de referencia es el modelo neo-Hookean compresible

$$W(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\mu (\text{tr}(\mathbf{C}) - 3 - 2 \ln(J)) + \frac{1}{2}\lambda (\ln(J))^2, \quad (3.9)$$

donde  $\mu$  y  $\lambda$  son los parametros de Lamé y  $\det \mathbf{F} = J$ . La versión incompresible del modelo neo-Hookean esta dada por

$$W(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\mu (\text{tr}(\mathbf{C}) - 3). \quad (3.10)$$

Para dar cumplimiento a la restricción de incompresibilidad en el contexto del método de los elementos finitos o del método del elemento virtual, se utiliza la versión casi-incompresible

$$W(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\mu (J^{-2/3} \text{tr}(\mathbf{C}) - 3) + \frac{1}{2}\kappa (J - 1)^2, \quad (3.11)$$

donde  $\kappa$  es un parámetro penalizador que fuerza aproximadamente la condición de incompresibilidad, que también puede representar el módulo de compresibilidad. Aquí la energía de deformación se define descomponiendola en una parte de distorsión  $\widehat{W}(\mathbf{C})$  y en una parte volumétrica  $U(J)$ , es decir  $W(\mathbf{C}) = \widehat{W}(\mathbf{C}) + U(J)$ . Otro modelo utilizado es la extensión del modelo elástico lineal estándar, llamado modelo de Hencky

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathcal{D} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.12)$$

el cual esta basadao en el tensor de deformación logaritmico Euleriano

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \ln(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{B}), \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\top$  es el tensor de deformación izquierdo de Cauchy-Green,  $\mathbf{V} = (\mathbf{B})^{1/2}$ , y

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (3.14)$$

El modelo de Hencky también es útil representarlo en función de los valores propios de  $\mathbf{F}$ :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mu[\ln(\lambda_1)^2 + \ln(\lambda_2)^2 + \ln(\lambda_3)^2] + \frac{\lambda}{2}(\ln(J)). \quad (3.15)$$

### Elastoplasticidad finita

A diferencia de los materiales hiperelásticos, los materiales elastoplásticos al ser cargados a cierto nivel de esfuerzo presentan una disipación de energía significativa, lo que los hace dependientes del historial de deformación y presentar deformaciones permanentes después de la descarga. Un enfoque común para modelar este tipo de material con cinemática para deformaciones finitas es la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación en componentes elástica y plástica

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p, \quad (3.16)$$

donde  $\mathbf{F}^e$  es el gradiente de deformación elástica, y  $\mathbf{F}^p$  es el gradiente de deformación plástica. Esta descomposición está basada en la suposición de la existencia de una configuración intermedia sin esfuerzo definida por el gradiente de deformación plástica. El tensor de esfuerzos de Kirchoff, utilizado en la teoría de plasticidad, esta dada por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{B}^e \frac{\partial W^e}{\partial \mathbf{B}^e}, \quad (3.17)$$

donde  $\mathbf{B}^e$  es la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green, el cual se puede calcular con  $\mathbf{B}^e = \mathbf{F}\mathbf{C}^{p-1}\mathbf{F}^\top$ , siendo  $\mathbf{C}^p$  la parte plástica del tensor derecho de Cauchy-Green. El tensor de esfuerzo de Kirchoff se puede calcular en función del tensor de esfuerzo Cauchy mediante la relación  $\mathbf{T} = J\boldsymbol{\tau}$ . La función  $W^e$  es la función de energía de deformación de la parte elástica de la deformación. En los modelos elastoplásticos se define una función de fluencia, una regla de flujo y una ley de endurecimiento. Se considera la función de fluencia de von Mises

$$F(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\tau}^{(dev)} : \boldsymbol{\tau}^{(dev)} - \bar{\sigma}_y(\alpha)} \leq 0, \quad (3.18)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}^{(dev)}$  es la parte desviadora del tensor de esfuerzo de Kirchoff y  $\bar{\sigma}_y(\alpha)$  es un modelo de endurecimiento en términos de la variable plástica  $\alpha$ . La regla de flujo asociado esta dada por

$$\mathcal{L}_v \mathbf{B}^e = -2\dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{B}^e \quad (3.19)$$

$$(\dot{\mathbf{C}}^{(p)})^{-1} = -2\dot{\gamma} \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{F} (\mathbf{C}^{(p)})^{-1} \quad (3.20)$$

donde  $\mathcal{L}_v \mathbf{B}^e$  se refiere a la derivada de Lie del  $\mathbf{B}^e$ . Además, la ecuación de evolución de la variable de endurecimiento esta dada por  $\dot{\alpha} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \beta}$ . Las condiciones de Kuhn-Tucker para el modelo elastoplástico son

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad F \leq 0; \quad \dot{\gamma} F = 0, \quad (3.21)$$

y la condición de consistencia

$$\dot{\gamma} F = 0. \quad (3.22)$$

### 3.1.4. Ecuaciones que gobiernan el caso infinitesimal

Se puede considerar el caso infinitesimal como un caso especial de la teoría con deformaciones finitas. Para esto se supone que los desplazamientos y deformaciones son pequeños, es decir, el sólido deformable no cambia de forma apreciable desde la configuración de referencia a la configuración actual, lo que implica que  $\mathbf{X} \approx \mathbf{x}$ . Considerando lo anterior, y similarmente al caso finito, la forma débil para el caso infinitesimal se plantea como: encontrar  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_b(\mathbf{v}) + l_t(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{W}, \quad (3.23)$$

con

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (3.24)$$

$$l_b(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad l_t(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \quad (3.25)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformación infinitesimal dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^\top \mathbf{u}). \quad (3.26)$$

## Elasticidad lineal

La ecuación constitutiva para elasticidad lineal con pequeñas deformaciones en un material isotrópico está dada por

$$\mathbf{T} = \mathcal{D} : \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}, \quad (3.27)$$

donde  $\mathcal{D}$  es el tensor de cuarto orden (3.14),  $\mu$  y  $\lambda$  son los parámetros de Lamé, y  $\mathbf{I}$  es la identidad.

## Elastoplasticidad infinitesimal

Para pequeñas deformaciones se utiliza la descomposición aditiva del tensor de deformación infinitesimal en su parte elástica y parte plástica

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (3.28)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  es el tensor infinitesimal de deformación elástico y  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  es el tensor de deformación infinitesimal plástico. De esta forma, la ecuación constitutiva para el cálculo del esfuerzo está dada por

$$\mathbf{T} = \mathcal{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathcal{D}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (3.29)$$

donde  $\mathcal{D}^e$  es el tensor de cuarto orden (3.14), y  $\mathbf{T}$  es el tensor de esfuerzos de Cauchy. Al igual que para el caso con grandes deformaciones, se define de una función de fluencia, una regla de flujo y una ley de endurecimiento. Se considera la función de fluencia de von Mises con endurecimiento isotrópico

$$F(\mathbf{T}, \alpha) = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{T}^{(dev)} : \mathbf{T}^{(dev)}} - \bar{\sigma}_y(\alpha) \leq 0, \quad (3.30)$$

donde  $\mathbf{T}^{(dev)}$  es la parte desviadora del tensor de esfuerzo de Cauchy, y  $\bar{\sigma}_y(\alpha)$  es la ley de endurecimiento en términos de la variable plástica  $\alpha$ . La regla de flujo asociado está dada por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \quad (3.31)$$

Además, la ecuación de evolución de la variable de endurecimiento está dada por  $\dot{\alpha} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \beta}$ . Las condiciones de Kuhn-Tucker para el modelo elastoplástico son

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad F \leq 0; \quad \dot{\gamma} F = 0, \quad (3.32)$$

y la condición de consistencia

$$\dot{\gamma}F = 0. \quad (3.33)$$

## 3.2. Método del elemento virtual

Las integrales de la forma débil se evalúan sobre el dominio  $\bar{\Omega}$  utilizando una partición de polígonos no superpuestos. Se denotará mediante  $E$  un polígono o celda de integración de área  $|E|$  con  $n$  nodos ubicados en  $\mathbf{X}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $N_{\text{dof}} = 2n$  al número de grados de libertad,  $\mathcal{T}^h$  al conjunto de las celdas de la partición,  $e$  al lado de una celda de largo  $|e|$ , y  $h$  el máximo diámetro de cualquiera de los elementos dentro de la partición. Al conjunto de los lados de los elementos de la partición se le denotará mediante  $\zeta^h$ , y al conjunto de los lados que coincidan con  $\Gamma_t$  se le denotará mediante  $\zeta_t^h$ . Con el propósito de integrar la forma débil de forma discreta sobre cada celda, y al igual que en el procedimiento estándar del método de los elementos finitos, se define los espacios discretos apropiados  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}$  para las funciones discretas de prueba  $\mathbf{u}^h$  y peso  $\mathbf{v}^h$  respectivamente. Estos espacios se construyen mediante el ensamble de los espacios discretos locales  $\mathcal{V}^h(E)$  y  $\mathcal{W}^h(E)$  que consisten en los desplazamientos restringidos sobre cada celda  $E \in \mathcal{T}^h$ ,

$$\mathcal{V}^h := \{\mathbf{u}^h \in [H^1(\bar{\Omega}) \cap C^0(\bar{\Omega})]^2 : \mathbf{u}^h|_E \in \mathcal{V}^h(E) \quad \forall E \in \mathcal{T}^h\},$$

$$\mathcal{W}^h := \{\mathbf{v}^h \in [H^1(\bar{\Omega}) \cap C^0(\bar{\Omega})]^2 : \mathbf{v}^h|_E \in \mathcal{W}^h(E) \quad \forall E \in \mathcal{T}^h\}.$$

Luego, la forma bilineal discreta en un elemento  $E \in \mathcal{T}^h$  para  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h(E)$  y  $\mathbf{v}^h \in \mathcal{W}^h(E)$ , esta dada por

$$a_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \ell_{b_E}(\mathbf{v}^h) + \ell_{t_E}(\mathbf{v}^h), \quad (3.34)$$

que al ensamblar la contribución de cada elemento, se recupera la contribución total

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} a_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h), \quad (3.35)$$

y

$$\ell_b(\mathbf{v}^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} \ell_{b_E}(\mathbf{v}^h) \quad \ell_t(\mathbf{v}^h) = \sum_{e \in \zeta_t^h} \ell_{t_E}(\mathbf{v}^h). \quad (3.36)$$

Un paso importante en la descomposición del elemento virtual, es la definición de un operador local de proyección, tanto para los desplazamientos de prueba y de peso

$$\Pi : \mathcal{V}^h(E) \rightarrow \mathcal{P}_k(E), \quad (3.37)$$

$$\Pi : \mathcal{W}^h(E) \rightarrow \mathcal{P}_k(E), \quad (3.38)$$

donde  $\mathcal{V}^h(E)$  y  $\mathcal{W}^h(E)$  son los espacios discretos locales de los desplazamientos admisibles sobre  $E$  que puede contener términos no polinomiales, y  $\mathcal{P}_k(E)$  representa un espacio local de desplazamientos lineales sobre la celda  $E$ . La proyección  $\Pi$  debe satisfacer la condición de ortogonalidad [16, 54]

$$a_E(\mathbf{v}^h - \Pi\mathbf{v}^h, \mathbf{p}) = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}_k(E), \quad (3.39)$$

o de forma alternativa la condición [37, 55]

$$\langle \mathbf{v}^h - \Pi\mathbf{v}^h, \mathbf{p} \rangle = \int_E \nabla(\mathbf{v}^h - \Pi\mathbf{v}^h) : \nabla\mathbf{p} \, d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}_k(E), \quad (3.40)$$

que establecen que los términos no polinomiales  $\mathbf{v}^h - \Pi\mathbf{v}^h$ , energéticamente, son ortogonales a  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_k(E)$ . Para la construcción del operador  $\Pi$  se utilizará la condición de ortogonalidad (3.40), el cual también puede ser expresado como

$$\langle \mathbf{p}, \Pi\mathbf{v}^h \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{v}^h \rangle \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}_k(E). \quad (3.41)$$

Para la construcción de los espacios discretos locales  $\mathcal{V}^h(E)$  y  $\mathcal{W}^h(E)$ , se consideran las bases canónicas  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}$  definidas de la siguiente forma para dos grados de libertad por nodo:

$$[\varphi_{2a-1}] = [\varphi_a \ 0]^\top \quad [\varphi_{2a}] = [0 \ \varphi_a]^\top \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.42)$$

Luego, los desplazamientos de prueba y de peso pueden ser escritos en función de las bases como una combinación lineal de la siguiente forma [54]:

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{X}) = \sum_{a=1}^n \varphi_a(\mathbf{X}) \mathbf{b}_a = \sum_{i=1}^{2n} v_i \varphi_i, \quad (3.43)$$

donde  $[\mathbf{b}_a] = [v_{2a-1} \ v_{2a}]^\top$  son los desplazamientos nodales en el sistema bidimensional de coordenadas Cartersianas del nodo  $a$ , de alguna celda  $E$ . Una de las características del VEM, es que estas funciones de base no se evalúan explícitamente, es decir, no se requiere el conocimiento del valor de las funciones de base al interior de las celdas de integración, solo se requiere su valor en los bordes de cada elemento. En estas funciones, al definir las de manera que se cumpla la propiedad de  $\delta$  de Kronecker, el valor en el borde de cada elemento es conocida.

El espacio de desplazamientos lineales  $E$ , se debe definir con bases que pueda representar los movimientos de cuerpo rígido y modos de deformación constantes de una celda. La dimensión de  $\mathcal{P}_k(E)$  esta dada por  $n_k = (k + 1)(k + 2)$  [16], donde  $k$  define el orden de la aproximación dentro de la celda de integración. Utilizando  $k = 1$ , para desplazamientos lineales dentro de la celda, se obtiene  $n_k = 6$  bases, que se denotarán mediante  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{n_k}$ . Se utilizan las bases [16, 38]

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] &= [ [\mathbf{m}_1] \quad [\mathbf{m}_2] \quad [\mathbf{m}_3] \quad [\mathbf{m}_4] \quad [\mathbf{m}_5] \quad [\mathbf{m}_6] ] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & X_2 - \bar{X}_2 & X_1 - \bar{X}_1 & 0 & X_2 - \bar{X}_2 \\ 0 & 1 & -(X_1 - \bar{X}_1) & 0 & X_2 - \bar{X}_2 & X_1 - \bar{X}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

para generar la proyección de los desplazamiento sobre  $\mathcal{P}_k(E)$  mediante la combinación lineal

$$\Pi \mathbf{v}^h = \sum_{\beta=1}^{n_k} s_\beta \mathbf{m}_\beta, \quad (3.45)$$

donde  $s_\beta$  son los coeficientes a encontrar para construir los desplazamiento proyectados sobre  $\mathcal{P}_k(E)$ . Estos coeficientes depende implícitamente de los coeficientes de los desplazamientos nodales según (3.43), mediante la relación [56]

$$s_\beta = \sum_{i=1}^{2n} b_i s_i^\beta \quad \beta = 1, \dots, n_k, \quad (3.46)$$

que junto con (3.43) y (3.45) se puede llegar a

$$\Pi \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{\beta=1}^{n_k} s_i^\beta \mathbf{m}_\beta. \quad (3.47)$$

Luego, utilizando (3.43) y (3.45), la condición de ortogonalidad (3.41) puede ser también expresada como

$$\langle \mathbf{p}, \Pi \boldsymbol{\varphi}_i \rangle = \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}_k(E), \quad (3.48)$$

que junto con (3.47) y considerando que  $\mathbf{m}_\beta$  son bases para  $\mathbf{p}$ , se puede llegar a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{m}_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n_k} s_i^\beta \mathbf{m}_\beta \rangle &= \langle \mathbf{m}_\alpha, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \quad \alpha = 1, \dots, n_k \\ \sum_{\beta=1}^{n_k} s_i^\beta \langle \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta \rangle &= \langle \mathbf{m}_\alpha, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \quad \alpha = 1, \dots, n_k \end{aligned} \quad (3.49)$$

Expandiendo la relación anterior y reordenando términos, se obtiene la siguiente relación matricial:

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1 \rangle & \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_{nk} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1 \rangle & \langle \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_{nk} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{m}_{nk}, \mathbf{m}_1 \rangle & \langle \mathbf{m}_{nk}, \mathbf{m}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{m}_{nk}, \mathbf{m}_{nk} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i^1 \\ s_i^2 \\ \vdots \\ s_i^{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{m}_1, \varphi_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_2, \varphi_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{m}_{nk}, \varphi_i \rangle \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Definiendo

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1 \rangle & \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_{nk} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1 \rangle & \langle \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_{nk} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{m}_{nk}, \mathbf{m}_1 \rangle & \langle \mathbf{m}_{nk}, \mathbf{m}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{m}_{nk}, \mathbf{m}_{nk} \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$$[\mathbf{s}_i] = \begin{bmatrix} s_i^1 \\ s_i^2 \\ \vdots \\ s_i^{nk} \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

y

$$[\mathbf{b}_i] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{m}_1, \varphi_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_2, \varphi_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{m}_{nk}, \varphi_i \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

la expresión (3.50) se puede escribir como

$$[\mathbf{G}][\mathbf{s}_i] = [\mathbf{b}_i] \quad \rightarrow \quad [\mathbf{s}_i] = [\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{b}_i] \quad (3.54)$$

La expresión anterior solo esta definida para un grado de libertad. Para obtener una expresión equivalente que contengan todos los grados de libertad asociados a una celda de integración, primero se define

$$[\mathbf{B}] = [[\mathbf{b}_1] \quad [\mathbf{b}_2] \quad \cdots \quad [\mathbf{b}_{N_{\text{dof}}}] ] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{m}_1, \varphi_1 \rangle & \langle \mathbf{m}_1, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{m}_1, \varphi_{N_{\text{dof}}} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_2, \varphi_1 \rangle & \langle \mathbf{m}_2, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{m}_2, \varphi_{N_{\text{dof}}} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{m}_{nk}, \varphi_1 \rangle & \langle \mathbf{m}_{nk}, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{m}_{nk}, \varphi_{N_{\text{dof}}} \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

que junto con (3.54) y definiendo la versión matricial del operador de proyección como  $[\mathbf{\Pi}]_{\alpha i} = s_i^\alpha$ , se tiene

$$[\mathbf{\Pi}] = [\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{B}] \quad (3.56)$$

donde

$$[\mathbf{\Pi}] = \begin{bmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \cdots & s_{N_{\text{dof}}}^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \cdots & s_{N_{\text{dof}}}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^{n_k} & s_2^{n_k} & \cdots & s_{N_{\text{dof}}}^{n_k} \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Ahora para obtener la versión numérica del operador de proyección, primero utilizamos las bases (3.44) en (3.50), lo que nos queda

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2|E| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |E| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |E| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2|E| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i^1 \\ s_i^2 \\ s_i^3 \\ s_i^4 \\ s_i^5 \\ s_i^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{m}_1, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_2, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_3, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_4, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_5, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_6, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

donde  $[\mathbf{G}]$  presenta un problema de rango, ya que el operador  $\Pi$  es definido hasta las constantes. Se utiliza un operador de proyección sobre las constante  $\Pi_o : \mathcal{V}^h(E) \rightarrow \mathcal{P}_o(E)$  para resolver este problema, que debe cumplir la condición [56]

$$\Pi_o (\Pi \mathbf{v}^h - \mathbf{v}^h) = 0, \quad (3.59)$$

que establece que la parte no polinomial no posee constantes. Se elige el siguiente operador que satisface dicha condición [56]:

$$\Pi_o \mathbf{v}^h := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}^h(\mathbf{X}_i), \quad (3.60)$$

Con este operador, junto con (3.47), la proyección  $\Pi_o \boldsymbol{\varphi}_i$  requerida en (3.48) se puede expresa como

$$\sum_{\beta=1}^{n_k} s_i^\beta \Pi_o \mathbf{m}_\alpha = \Pi_o \boldsymbol{\varphi}_i. \quad (3.61)$$

Ahora, para utilizar este operador y solucionar el problema de rango, se expande para  $n_k = 6$ ,

$$s_i^1 \Pi_o \mathbf{m}_1 + s_i^2 \Pi_o \mathbf{m}_2 + s_i^3 \Pi_o \mathbf{m}_3 + s_i^4 \Pi_o \mathbf{m}_4 + s_i^5 \Pi_o \mathbf{m}_5 + s_i^6 \Pi_o \mathbf{m}_6 = \Pi_o \boldsymbol{\varphi}_i, \quad (3.62)$$

que junto con las bases (3.44) y ordenando de forma matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i^1 \\ s_i^2 \\ s_i^3 \\ s_i^4 \\ s_i^5 \\ s_i^6 \end{bmatrix} = \Pi_o \boldsymbol{\varphi}_i, \quad (3.63)$$

para finalmente utilizarla en (3.58), como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2|E| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |E| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |E| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2|E| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i^1 \\ s_i^2 \\ s_i^3 \\ s_i^4 \\ s_i^5 \\ s_i^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Pi_o \boldsymbol{\varphi}_i)_1 \\ (\Pi_o \boldsymbol{\varphi}_i)_2 \\ \langle \mathbf{m}_3, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_4, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_5, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \\ \langle \mathbf{m}_6, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

donde  $(\ )_j, j = 1, 2$  expresan las componentes Cartesianas. Luego, para el cálculo de las componentes de  $[\mathbf{B}]$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}]_{\alpha i} &= \langle \mathbf{m}_\alpha, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle = \int_E \nabla \mathbf{m}_\alpha : \nabla \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega \\ &= \int_E \nabla \cdot (\nabla \mathbf{m}_\alpha^\top \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\Omega - \int_E (\nabla \cdot \nabla \mathbf{m}_\alpha) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega \\ &= \int_{\partial E} (\nabla \mathbf{m}_\alpha^\top \boldsymbol{\varphi}_i) \cdot \mathbf{N} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde se utilizó el teorema de la divergencia. Se define  $[\mathbf{B}_a]$  que almacena las componentes de la matriz  $[\mathbf{B}]$  que corresponden al nodo  $a$  y sus grados de libertad  $2a - 1$  y  $2a$  de alguna celda de integración:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{B}_a] &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{m}_1, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_1, \varphi_{2a} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_2, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_2, \varphi_{2a} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_3, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_3, \varphi_{2a} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_4, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_4, \varphi_{2a} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_5, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_5, \varphi_{2a} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_6, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_6, \varphi_{2a} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_{2a-1})_1 & (\varphi_{2a})_1 \\ (\varphi_{2a-1})_2 & (\varphi_{2a})_2 \\ \langle \mathbf{m}_3, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_3, \varphi_{2a} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_4, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_4, \varphi_{2a} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_5, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_5, \varphi_{2a} \rangle \\ \langle \mathbf{m}_6, \varphi_{2a-1} \rangle & \langle \mathbf{m}_6, \varphi_{2a} \rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_a & 0 \\ 0 & \bar{\varphi}_a \\ \int_{\partial E} \varphi_a N_2 d\Gamma & - \int_{\partial E} \varphi_a N_1 d\Gamma \\ \int_{\partial E} \varphi_a N_1 d\Gamma & 0 \\ 0 & \int_{\partial E} \varphi_a N_2 d\Gamma \\ \int_{\partial E} \varphi_a N_2 d\Gamma & \int_{\partial E} \varphi_a N_1 d\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.66)
\end{aligned}$$

donde

$$\bar{\varphi}_a := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_a(\mathbf{X}_i), \quad (3.67)$$

Finalmente la matriz de proyección para una celda de integración

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Pi}] &= [[\mathbf{\Pi}_1] \quad \cdots \quad [\mathbf{\Pi}_a] \quad \cdots \quad [\mathbf{\Pi}_n]] \\
&= [\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{B}] \quad (3.68)
\end{aligned}$$

con

$$[\mathbf{\Pi}_a] = [\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{B}_a] \quad (3.69)$$

Para el caso de deformaciones infinitesimales, es conveniente aislar desde la matriz  $[\mathbf{\Pi}]$  las componentes que representan los estados de deformación constante, y las componentes que representan los modos de cuerpo rígido [38]. Para este propósito, primero se divide la matriz  $[\mathbf{G}]$  en las componentes cuyas bases están relacionadas con los modos de cuerpo rígido,  $\alpha = 1, 2, 3$ ,

$$[\mathbf{G}_R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2|E| \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{G}_R]^{-1} = \frac{1}{|E|} \begin{bmatrix} |E| & 0 & 0 \\ 0 & |E| & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{|E|}[\mathbf{I}_R] \quad (3.70)$$

y en las componentes cuyas bases estén relacionadas con los estados de deformación constante,  $\alpha = 4, 5, 6$ ,

$$[\mathbf{G}_C] = \begin{bmatrix} |E| & 0 & 0 \\ 0 & |E| & 0 \\ 0 & 0 & 2|E| \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{G}_C]^{-1} = \frac{1}{|E|} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{|E|} [\mathbf{I}_C]. \quad (3.71)$$

Lo mismo para  $[\mathbf{B}]$ , de la siguiente manera:

$$[\mathbf{B}_{Ra}] = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_a & 0 \\ 0 & \bar{\varphi}_a \\ \int_{\partial E} \varphi_a N_2 d\Gamma & - \int_{\partial E} \varphi_a N_1 d\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

y

$$[\mathbf{B}_{Ca}] = \begin{bmatrix} \int_{\partial E} \varphi_a N_1 d\Gamma & 0 \\ 0 & \int_{\partial E} \varphi_a N_2 d\Gamma \\ \int_{\partial E} \varphi_a N_2 d\Gamma & \int_{\partial E} \varphi_a N_1 d\Gamma \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Finalmente, se puede definir

$$[\mathbf{\Pi}_R] = [\mathbf{G}_R]^{-1} [\mathbf{B}_R] \quad (3.74)$$

asociada a los modos de cuerpo rígido, donde

$$[\mathbf{B}_R] = [[\mathbf{B}_{R1}] \quad \cdots \quad [\mathbf{B}_{Ra}] \quad \cdots \quad [\mathbf{B}_{Rn}]] \quad (3.75)$$

y

$$[\mathbf{\Pi}_C] = [\mathbf{G}_C]^{-1} [\mathbf{B}_C] \quad (3.76)$$

asociada a los estados de deformación constante, donde

$$[\mathbf{B}_C] = [[\mathbf{B}_{C1}] \quad \cdots \quad [\mathbf{B}_{Ca}] \quad \cdots \quad [\mathbf{B}_{Cn}]]. \quad (3.77)$$

### 3.3. Discretización y descomposición de la forma débil

Un paso importante en el método del elemento virtual, es la descomposición de los desplazamiento mediante el operador de proyección definido en la sección (3.2). Esta descomposición divide de forma aditiva los desplazamientos en una parte que contiene los términos polinomiales y otra que contiene los términos no-polinomiales:

$$\mathbf{u}^h = \Pi \mathbf{u}^h + (\mathbf{u}^h - \Pi \mathbf{u}^h), \quad (3.78)$$

$$\mathbf{v}^h = \Pi \mathbf{v}^h + (\mathbf{v}^h - \Pi \mathbf{v}^h). \quad (3.79)$$

Luego, estos desplazamientos descompuestos son reemplazados en la forma débil, lo que permite la descomposición de la matriz de rigidez en una matriz de rigidez que asegura la consistencia y en otra matriz de rigidez que asegura la estabilidad. Esta descomposición se aplica a nivel de los elementos.

### 3.3.1. Forma débil MEV para mecánica de sólidos lineal

Después de sustituir la descomposición (3.78) y (3.79) en la forma bilineal, se obtiene la siguiente descomposición de la forma bilineal sobre una celda de integración

$$\begin{aligned} a_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) &= a_E(\Pi \mathbf{u}^h + (\mathbf{u}^h - \Pi \mathbf{u}^h), \Pi \mathbf{v}^h + (\mathbf{v}^h - \Pi \mathbf{v}^h)) \\ &= a_E(\Pi \mathbf{u}^h, \Pi \mathbf{v}^h) + a_E(\mathbf{u}^h - \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \Pi \mathbf{v}^h), \end{aligned} \quad (3.80)$$

donde se utilizó las propiedad de simetría de la forma bilineal y la condición de ortogonalidad (3.39). El primer término en el lado derecho es la forma bilineal asociada a la matriz de rigidez de consistencia y el segundo término del lado derecho es la forma bilineal asociada a la matriz de rigidez de estabilidad. Este segundo término se selecciona de forma conveniente para que sea capaz de estabilidad y asegurar la convergencia del método, se plantea entonces la aproximación:

$$a_E^h(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = a_E(\Pi \mathbf{u}^h, \Pi \mathbf{v}^h) + s_E(\mathbf{u}^h - \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \Pi \mathbf{v}^h). \quad (3.81)$$

### 3.3.2. Forma débil MEV para mecánica de sólidos no lineal

Tanto para el caso de deformaciones finitas (hiperelástico y elastoplástico) y como para el caso de deformaciones infinitesimales en el régimen plástico, debido a la no linealidad de las relaciones esfuerzo-deformación, no es posible plantear la solución de la forma débil de forma directa. Específicamente,  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  es lineal con respecto a  $\mathbf{v}$ , pero no lineal respecto a  $\mathbf{u}$ , lo que implica además, la imposibilidad del uso de las propiedades de la forma bilineal, y por ende la condición de ortogonalidad. Así, para estos casos, la descomposición de la forma débil para generar una matriz de consistencia y una de estabilidad se plantea mediante una aproximación directa

$$a_E^h(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \Pi \mathbf{v}^h) + s_E(\mathbf{u}^h - \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \Pi \mathbf{v}^h), \quad (3.82)$$

para obtener una relación idéntica a la anterior, salvo el comportamiento no lineal y la dependencia implícita de un conjunto de variables internas  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  para el caso plástico. Luego, para

resolver estas ecuaciones no lineales, se utiliza el procedimiento iterativo Newton-Raphson, lo que requiere la linealización de la forma débil. Para este propósito se utiliza la derivada direccional

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \mathcal{F} = \left. \frac{d}{d\omega} \right|_{\omega=0} \mathcal{F}(\mathbf{x}_o + \omega \Delta \mathbf{u}) = L[\mathcal{F}] \quad (3.83)$$

sobre  $a(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ , resultando:

$$a^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) := L[a(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \mathbf{u}, \mathbf{v})], \quad (3.84)$$

donde la notación indica la dependencia implícita con respecto a  $\mathbf{u}$  y  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ ; y la bilinealidad con respecto a  $\mathbf{v}$  y  $\Delta \mathbf{u}$ . Ahora, para establecer el algoritmo iterativo sobre la forma débil global, se define  $t_n$  como el paso de carga actual, y  $k$  como el contador de iteraciones. Luego, utilizando una expansión de series de Taylor truncada hasta el término lineal, junto con (3.84), la ecuación incremental para la resolución iterativa se expresa como

$$a^*({}^n\{\boldsymbol{\alpha}\}, {}^{n+1}\mathbf{u}^k; \Delta \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = \ell_b(\mathbf{v}) + \ell_t(\mathbf{v}) + a({}^n\{\boldsymbol{\alpha}\}, {}^{n+1}\mathbf{u}^k, \mathbf{v}), \quad (3.85)$$

donde se ha hecho la suposición que las fuerzas externas son independiente del desplazamiento. Los desplazamientos son actualizados mediante

$${}^{n+1}\mathbf{u}^{k+1} = {}^{n+1}\mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}^k, \quad (3.86)$$

donde  $\Delta \mathbf{u}^k$  se calcula resolviendo (3.85) iterativamente hasta que el lado derecho se anule.

### 3.4. Operador ponderación nodal

Para la construcción del esquema de integración nodal, se propone un operador de ponderación nodal que asocie a cada nodo de la malla la información de los elementos virtuales conectados a este. Se denota como  $\mathcal{T}^I$  al conjunto de elementos virtuales asociados al nodo  $I$ , y a  $n_E^I$  como al número de nodos de la celda  $E$  asociada al nodo  $I$ . Cada elemento virtual contribuye  $|E|/n_E^I$  de área al nodo  $I$ , que al sumar todas las contribuciones, se obtiene el área  $|I|$  del nodo  $I$ , como sigue:

$$|I| = \sum_{E \in \mathcal{T}^I} \frac{1}{n_E^I} |E|. \quad (3.87)$$

Similarmente, la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}_I(\mathbf{u}^h)$  para un nodo  $I$ , se calcula al ponderar las deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}(E)$  de cada  $E \in \mathcal{T}^I$ , como sigue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I(\mathbf{u}^h) = \sum_{I \in \mathcal{T}^I} |E| \frac{1}{n_E^I} \boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{u}^h). \quad (3.88)$$

Análogamente, el tensor gradiente de deformación nodal  $\mathbf{F}_I(\mathbf{u}^h)$  se obtiene al promediar los tensores gradiente deformación  $\mathbf{F}_E(\mathbf{u}^h)$  de cada elemento virtual, como sigue:

$$\mathbf{F}_I(\mathbf{u}^h) = \sum_{I \in \mathcal{T}^I} |E| \frac{1}{n_E^I} \mathbf{F}_E(\mathbf{u}^h). \quad (3.89)$$

En base a lo anterior, el operador de ponderación nodal propuesto es el siguiente:

$$\pi_I[\cdot] = \sum_{E \in \mathcal{T}^I} |E| \frac{1}{n_E^I} [\cdot]_E, \quad (3.90)$$

donde  $[\cdot]_E$  denota evaluación sobre la celda  $E$ . Finalmente, utilizando este operador de ponderación nodal, la representación nodal de una función  $\mathcal{F}$ , que puede ser una matriz o un tensor de orden arbitrario, se obtiene como

$$\mathcal{F}_I = \pi_I[\mathcal{F}] = \sum_{E \in \mathcal{T}^I} |E| \frac{1}{n_E^I} [\mathcal{F}]_E. \quad (3.91)$$

## 3.5. Implementación

### 3.5.1. Implementación deformaciones infinitesimales

#### Matriz de rigidez de consistencia para elasticidad lineal

La construcción de la matriz de rigidez elemental de consistencia para elasticidad lineal, al igual que en el método de los elementos finitos, parte de la forma débil a nivel de un elemento (primer término del lado derecho de la ecuación (3.81)), al discretizar los desplazamientos mediante la ecuación (3.43), junto con la aplicación de las propiedades de la forma bilineal, como sigue:

$$\begin{aligned} a_E(\Pi \mathbf{u}^h, \Pi \mathbf{v}^h) &= a_E \left( \sum_{i=1}^{2n} u_i \Pi \boldsymbol{\varphi}_i, \sum_{j=1}^{2n} v_j \Pi \boldsymbol{\varphi}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} u_i v_j a_E(\Pi \boldsymbol{\varphi}_i, \Pi \boldsymbol{\varphi}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} u_i v_j [\mathbf{K}_E^c]_{ij} \end{aligned} \quad (3.92)$$

donde se definió  $[\mathbf{K}_E^c]_{ij}$  como las componentes  $i, j$  de la matriz de rigidez de consistencia  $[\mathbf{K}_E^c]$  para un elemento  $E$ . Luego, utilizando (3.47), la componente de la matriz de rigidez se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_E^c]_{ij} &= a_E(\Pi\varphi_i, \Pi\varphi_j) \\
&= a_E\left(\sum_{\alpha=1}^{n_k} s_i^\alpha \mathbf{m}_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n_k} s_j^\beta \mathbf{m}_\beta\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} s_i^\alpha s_j^\beta a_E(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} [\Pi]_{\alpha i} [\Pi]_{\beta j} a_E(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} [\Pi]_{\alpha i} [\Pi]_{\beta j} [\tilde{\mathbf{G}}]_{\alpha\beta} \\
&= ([\Pi]^\top [\tilde{\mathbf{G}}] [\Pi])_{ij},
\end{aligned} \tag{3.93}$$

donde se definió  $a_E(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) = [\tilde{\mathbf{G}}]_{\alpha\beta}$ , que al utilizar (3.24) y (3.27), también se puede expresar como

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathbf{G}}]_{\alpha\beta} &= a_E(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{m}_\alpha) : \mathcal{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{m}_\beta) \, d\Omega \\
&= \int_E [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\alpha)]^\top [\mathbf{D}] [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\beta)] \, d\Omega \\
&= |E| [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\alpha)]^\top [\mathbf{D}] [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\beta)],
\end{aligned} \tag{3.94}$$

donde

$$[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\alpha)] = \begin{bmatrix} (\mathbf{m}_\alpha)_{1,1} \\ (\mathbf{m}_\alpha)_{2,2} \\ (\mathbf{m}_\alpha)_{1,2} + (\mathbf{m}_\alpha)_{2,1} \end{bmatrix}, \tag{3.95}$$

y  $[\mathbf{D}]$  es la matriz constitutiva para un material lineal elástico e isotrópico dada por

$$[\mathbf{D}] = \frac{E_y}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.96}$$

para el estado de esfuerzo plano y

$$[\mathbf{D}] = \frac{E_y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

para el estado de deformación plana, siendo  $E_y$  el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson. Al utilizar las bases (3.44), la ecuación (3.94) se anula para  $\beta, \alpha = 1, 2, 3$ , pudiendo expresar las componentes no nulas de  $[\tilde{\mathbf{G}}]$ , como sigue

$$[\tilde{\mathbf{G}}] = |E|[\mathbf{I}_G]^\top[\mathbf{D}][\mathbf{I}_G], \quad (3.98)$$

donde

$$[\mathbf{I}_G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.99)$$

Finalmente, considerando que las componentes de (3.94) se anulan en (3.93) cuando  $\beta, \alpha = 1, 2, 3$ , y utilizando (3.76) y (3.98) en (3.93), la matriz de rigidez de consistencia se deduce como sigue:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_E^c] &= [\mathbf{\Pi}]^\top[\tilde{\mathbf{G}}][\mathbf{\Pi}] \\ &= |E|[\mathbf{\Pi}_C]^\top[\mathbf{I}_G]^\top[\mathbf{D}][\mathbf{I}_G][\mathbf{\Pi}_C] \\ &= |E|([\mathbf{G}_C]^{-1}[\mathbf{B}_C])^\top[\mathbf{I}_G]^\top[\mathbf{D}][\mathbf{I}_G]([\mathbf{G}_C]^{-1}[\mathbf{B}_C]) \\ &= |E|[\mathbf{B}_C]^\top[\mathbf{G}_C]^{-1}[\mathbf{I}_G][\mathbf{D}][\mathbf{I}_G][\mathbf{G}_C]^{-1}[\mathbf{B}_C] \\ &= |E|[\mathbf{B}_C]^\top \frac{[\mathbf{I}_C]}{|E|}[\mathbf{I}_G][\mathbf{D}][\mathbf{I}_G] \frac{[\mathbf{I}_C]}{|E|}[\mathbf{B}_C] \\ &= |E|[\mathbf{B}_C]^\top \frac{[\mathbf{I}]}{|E|}[\mathbf{D}] \frac{[\mathbf{I}]}{|E|}[\mathbf{B}_C] \\ &= |E|[\mathbf{W}_E]^\top[\mathbf{D}][\mathbf{W}_E], \end{aligned} \quad (3.100)$$

donde se consideró que  $[\mathbf{I}_G][\mathbf{I}_C] = [\mathbf{I}_C][\mathbf{I}_G] = [\mathbf{I}]$ , y se definió

$$[\mathbf{W}_E] = \frac{[\mathbf{B}_C]}{|E|}. \quad (3.101)$$

### Matriz tangente y vector de fuerzas internas para elastoplasticidad infinitesimal

La construcción de la matriz de rigidez tangente elemental de consistencia para elastoplasticidad infinitesimal, parte de la forma débil descompuesta linealizada a nivel de un elemento (término del lado izquierdo de la ecuación (3.85), junto con el primer término del lado derecho de la ecuación (3.82), utilizando la definición de la forma débil para deformaciones

infinitesimales (3.24)), al discretizar los desplazamientos mediante la ecuación (3.43), junto con la aplicación de las propiedades de la forma bilineal de la forma débil linealizada, como sigue:

$$\begin{aligned}
a_E^*({\boldsymbol{\alpha}}, \Pi \mathbf{u}^h; \Delta \Pi \mathbf{u}^h, \Pi \mathbf{v}^h) &= a_E^* \left( {\boldsymbol{\alpha}}, \Pi \mathbf{u}^h; \sum_{i=1}^{2n} \Delta u_i \Pi \boldsymbol{\varphi}_i, \sum_{j=1}^{2n} v_j \Pi \boldsymbol{\varphi}_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \Delta u_i v_j a_E^*({\boldsymbol{\alpha}}, \Pi \mathbf{u}^h; \Pi \boldsymbol{\varphi}_i, \Pi \boldsymbol{\varphi}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \Delta u_i v_j [\mathbf{K}_{t,E}^c]_{ij},
\end{aligned} \tag{3.102}$$

donde se definió  $[\mathbf{K}_{t,E}^c]_{ij}$  como las componentes  $i, j$  de la matriz de rigidez tangente de consistencia  $[\mathbf{K}_{t,E}^c]$  para un elemento  $E$ . Luego, utilizando (3.47), la componente de la matriz de rigidez se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{t,E}^c]_{ij} &= a_E^*({\boldsymbol{\alpha}}, \Pi \mathbf{u}^h; \Pi \boldsymbol{\varphi}_i, \Pi \boldsymbol{\varphi}_j) \\
&= a_E^* \left( {\boldsymbol{\alpha}}, \Pi \mathbf{u}^h; \sum_{\alpha=1}^{n_k} s_i^\alpha \mathbf{m}_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n_k} s_j^\beta \mathbf{m}_\beta \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} s_i^\alpha s_j^\beta a_E^*({\boldsymbol{\alpha}}, \Pi \mathbf{u}^h; \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} [\boldsymbol{\Pi}]_{\alpha i} [\boldsymbol{\Pi}]_{\beta j} a_E^*({\boldsymbol{\alpha}}, \Pi \mathbf{u}^h; \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} [\boldsymbol{\Pi}]_{\alpha i} [\boldsymbol{\Pi}]_{\beta j} [\tilde{\mathbf{G}}_t]_{\alpha \beta} \\
&= ([\boldsymbol{\Pi}]^\top [\tilde{\mathbf{G}}_t] [\boldsymbol{\Pi}])_{ij},
\end{aligned} \tag{3.103}$$

donde se definió  $a_E^*({\boldsymbol{\alpha}}, \Pi \mathbf{u}^h; \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) = [\tilde{\mathbf{G}}_t]_{\alpha \beta}$ . Para este caso (elastoplástico infinitesimal), debido a la relación no lineal esfuerzo-deformación, se requiere la linealización

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{T} = \Delta \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}_t : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3.104}$$

que junto con (3.103), se llega a que

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathbf{G}}_t]_{\alpha\beta} &= a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi \mathbf{u}^h; \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{m}_\alpha) : \mathbf{D}_t : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{m}_\beta) \, d\Omega \\
&= \int_E [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\alpha)]^\top [\mathbf{D}_t] [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\beta)] \, d\Omega \\
&= |E| [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\alpha)]^\top [\mathbf{D}_t] [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\beta)],
\end{aligned} \tag{3.105}$$

donde  $[\mathbf{D}_t]$  es una matriz con las componentes del tensor constitutivo tangente elastoplástico infinitesimal

$$[\mathbf{D}_t] = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix}, \tag{3.106}$$

que es calculado, al igual que el esfuerzo, mediante el algoritmo de mapeo de retorno radial. Al igual que en el caso elástico lineal, al utilizar las bases (3.44), la ecuación (3.105) se anula para  $\beta, \alpha = 1, 2, 3$ , de modo que las componentes no nulas de  $[\tilde{\mathbf{G}}_t]$  se pueden expresar como

$$[\tilde{\mathbf{G}}_t] = |E| [\mathbf{I}_G]^\top [\mathbf{D}_t] [\mathbf{I}_G]. \tag{3.107}$$

Finalmente, similar a la deducción de la matriz de rigidez para caso elástico lineal, la matriz de rigidez tangente de consistencia para elastoplasticidad infinitesimal se deduce como sigue:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{t,E}^c] &= [\boldsymbol{\Pi}]^\top [\tilde{\mathbf{G}}_t] [\boldsymbol{\Pi}] \\
&= |E| [\boldsymbol{\Pi}_C]^\top [\mathbf{I}_G]^\top [\mathbf{D}_t] [\mathbf{I}_G] [\boldsymbol{\Pi}_C] \\
&= |E| ([\mathbf{G}_C]^{-1} [\mathbf{B}_C])^\top [\mathbf{I}_G]^\top [\mathbf{D}_t] [\mathbf{I}_G] ([\mathbf{G}_C]^{-1} [\mathbf{B}_C]) \\
&= |E| [\mathbf{B}_C]^\top [\mathbf{G}_C]^{-1} [\mathbf{I}_G] [\mathbf{D}_t] [\mathbf{I}_G] [\mathbf{G}_C]^{-1} [\mathbf{B}_C] \\
&= |E| [\mathbf{B}_C]^\top \frac{[\mathbf{I}_C]}{|E|} [\mathbf{I}_G] [\mathbf{D}_t] [\mathbf{I}_G] \frac{[\mathbf{I}_C]}{|E|} [\mathbf{B}_C] \\
&= |E| [\mathbf{B}_C]^\top \frac{[\mathbf{I}]}{|E|} [\mathbf{D}_t] \frac{[\mathbf{I}]}{|E|} [\mathbf{B}_C] \\
&= |E| [\mathbf{W}_E]^\top [\mathbf{D}_t] [\mathbf{W}_E].
\end{aligned} \tag{3.108}$$

El procedimiento para encontrar el vector de fuerzas internas es similar al procedimiento de la matriz tangente. Se parte de la forma débil descompuesta no lineal a nivel de un elemento (el tercer término del lado derecho de la ecuación (3.85), junto con el primer término del lado derecho de la ecuación (3.82)), al discretizar los desplazamientos mediante la ecuación (3.43), junto con la aplicación de la propiedad de la linealidad respecto a  $\mathbf{v}^h$ , como sigue:

$$\begin{aligned}
a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \Pi \mathbf{v}^h) &= a_E \left( \{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \sum_{j=1}^{2n} v_j \Pi \boldsymbol{\varphi}_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{2n} v_j a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi \mathbf{u}^h; \Pi \mathbf{u}^h, \Pi \boldsymbol{\varphi}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{2n} v_j [\mathbf{f}_{int, E}^c]_j,
\end{aligned} \tag{3.109}$$

donde se definió  $[\mathbf{f}_{int, E}^c]_j$  como la componente  $j$  de la matriz de fuerzas internas de consistencia  $[\mathbf{f}_{int, E}^c]$  para un elemento  $E$ . Luego, utilizando (3.47), la componente de la matriz de fuerzas internas se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{f}_{int, E}^c]_j &= a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \Pi \boldsymbol{\varphi}_j) \\
&= a_E \left( \{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \sum_{\beta=1}^{n_k} s_j^\beta \mathbf{m}_\beta \right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n_k} s_j^\beta a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n_k} [\boldsymbol{\Pi}]_{\beta j} a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n_k} [\boldsymbol{\Pi}]_{\beta j} [\tilde{\mathbf{Y}}]_\beta \\
&= ([\boldsymbol{\Pi}]^\top [\tilde{\mathbf{Y}}])_j,
\end{aligned} \tag{3.110}$$

donde se definió  $a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\beta) = [\tilde{\mathbf{Y}}]_\beta$ , que también se puede expresar como

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathbf{Y}}]_\beta &= a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{m}_\beta) : \mathbf{T}(\Pi \mathbf{u}^h) \, d\Omega \\
&= |E| [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{m}_\beta)]^\top [\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Pi \mathbf{u}^h)],
\end{aligned} \tag{3.111}$$

donde

$$[\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Pi \mathbf{u}^h)] = \begin{bmatrix} T_{11}(\Pi \mathbf{u}^h) \\ T_{22}(\Pi \mathbf{u}^h) \\ T_{12}(\Pi \mathbf{u}^h) \end{bmatrix}. \tag{3.112}$$

Como siempre para las bases (3.44), la ecuación (3.111) también se anula para  $\beta, \alpha = 1, 2, 3$ , de modo que las componentes no nulas de  $[\tilde{\mathbf{Y}}]$  se pueden expresar como

$$[\tilde{\mathbf{Y}}] = |E|[\mathbf{I}_G]^\top[\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Pi\mathbf{u}^h)]. \quad (3.113)$$

Finalmente, similar a la deducción de la matriz de rigidez tangente de consistencia, el vector de fuerzas internas de consistencia para elastoplasticidad infinitesimal se deduce como sigue:

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_{int,E}^c] &= [\boldsymbol{\Pi}]^\top[\tilde{\mathbf{Y}}] \\ &= |E|[\boldsymbol{\Pi}_C]^\top[\mathbf{I}_G]^\top[\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Pi\mathbf{u}^h)] \\ &= |E|([\mathbf{G}_C]^{-1}[\mathbf{B}_C])^\top[\mathbf{I}_G]^\top[\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Pi\mathbf{u}^h)] \\ &= |E|[\mathbf{B}_C]^\top[\mathbf{G}_C]^{-1}[\mathbf{I}_G]^\top[\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Pi\mathbf{u}^h)] \\ &= |E|[\mathbf{B}_C]^\top\frac{[\mathbf{I}_C]}{|E|}[\mathbf{I}_G]^\top[\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Pi\mathbf{u}^h)] \\ &= |E|[\mathbf{B}_C]^\top\frac{[\mathbf{I}]}{|E|}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Pi\mathbf{u}^h)] \\ &= |E|[\mathbf{W}_C]^\top[\hat{\boldsymbol{\sigma}}]. \end{aligned} \quad (3.114)$$

### 3.5.2. Implementación deformaciones finitas

La construcción de la matriz de rigidez tangente elemental de consistencia para deformaciones finitas, al igual que para el caso de plasticidad infinitesimal, parte de la forma débil descompuesta linealizada a nivel de un elemento (término del lado izquierdo de la ecuación (3.85), junto con el primer término del lado derecho de la ecuación (3.82), pero utilizando la definición de la forma débil para deformaciones finitas (3.7)), al discretizar los desplazamientos mediante la ecuación (3.43), junto con la aplicación de las propiedades de la forma bilineal de la forma débil linealizada, como sigue:

$$\begin{aligned} a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi\mathbf{u}^h; \Delta\Pi\mathbf{u}^h, \Pi\mathbf{v}^h) &= a_E^*\left(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi\mathbf{u}^h; \sum_{i=1}^{2n} \Delta u_i \Pi\boldsymbol{\varphi}_i, \sum_{j=1}^{2n} v_j \Pi\boldsymbol{\varphi}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \Delta u_i v_j a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi\mathbf{u}^h; \Pi\boldsymbol{\varphi}_i, \Pi\boldsymbol{\varphi}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \Delta u_i v_j [\mathbf{K}_{T,E}^c]_{ij}, \end{aligned} \quad (3.115)$$

donde se definió  $[\mathbf{K}_{T,E}^c]_{ij}$  como las componentes  $i, j$  de la matriz de rigidez tangente de consistencia  $[\mathbf{K}_{T,E}^c]$  para un elemento  $E$ . Luego, utilizando (3.47), la componente de la matriz de rigidez tangente se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{T,E}^c]_{ij} &= a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi \mathbf{u}^h; \Pi \varphi_i, \Pi \varphi_j) \\
&= a_E^* \left( \{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi \mathbf{u}^h; \sum_{\alpha=1}^{n_k} s_i^\alpha \mathbf{m}_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n_k} s_j^\beta \mathbf{m}_\beta \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} s_i^\alpha s_j^\beta a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi \mathbf{u}^h; \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} [\boldsymbol{\Pi}]_{\alpha i} [\boldsymbol{\Pi}]_{\beta j} a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi \mathbf{u}^h; \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_k} [\boldsymbol{\Pi}]_{\alpha i} [\boldsymbol{\Pi}]_{\beta j} [\tilde{\mathbf{Z}}_t]_{\alpha\beta} \\
&= ([\boldsymbol{\Pi}]^\top [\tilde{\mathbf{Z}}_t] [\boldsymbol{\Pi}])_{ij},
\end{aligned} \tag{3.116}$$

donde se definió  $a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi \mathbf{u}^h; \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) = [\tilde{\mathbf{Z}}_t]_{\alpha\beta}$ . Para este caso, debido a la relación no lineal esfuerzo-deformación y las deformaciones finitas, se requiere las linealizaciones

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{S} = \Delta \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : \Delta \mathbf{E} = \mathcal{D}_T : \Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}), \tag{3.117}$$

y

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \bar{\mathbf{E}} = \Delta \bar{\mathbf{E}}(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Sym}(\nabla_o \mathbf{v}^\top \nabla_o \Delta \mathbf{u}), \tag{3.118}$$

donde  $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \text{Sym}(\nabla_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{F}^\top)$ . De modo que

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathbf{Z}}_t]_{\alpha\beta} &= a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi \mathbf{u}^h; \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \int_E (\Delta \mathbf{S}(\Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\alpha) : \bar{\mathbf{E}}(\Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\beta) + \mathbf{S}(\Pi \mathbf{u}^h) : \Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta)) \, d\Omega \\
&= \int_E (\mathbf{F}^\top(\Pi \mathbf{u}) \nabla \mathbf{m}_\beta : \mathcal{D}_T : \mathbf{F}^\top(\Pi \mathbf{u}) \nabla \mathbf{m}_\alpha + \nabla \mathbf{m}_\beta : \nabla \mathbf{m}_\alpha \mathbf{S}(\Pi \mathbf{u})) \, d\Omega \\
&= \int_E ([\mathbf{H}_\beta]^\top [\bar{\mathbf{F}}]^\top [\mathcal{D}_T] [\bar{\mathbf{F}}] [\mathbf{H}_\alpha] + [\mathbf{H}_\beta]^\top [\mathbf{S}] [\mathbf{H}_\alpha]) \, d\Omega \\
&= |E| [\mathbf{H}_\beta]^\top [\bar{\mathbf{F}}]^\top [\mathcal{D}_T] [\bar{\mathbf{F}}] [\mathbf{H}_\alpha] + |E| [\mathbf{H}_\beta]^\top [\bar{\mathbf{S}}] [\mathbf{H}_\alpha],
\end{aligned} \tag{3.119}$$

donde  $[\mathcal{D}_T]$  es una matriz con las componentes del tensor constitutivo tangente finito

$$[\mathcal{D}_T] = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix}, \tag{3.120}$$

$$[\bar{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.121)$$

$$[\bar{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & F_{21} & 0 \\ 0 & F_{12} & 0 & F_{22} \\ F_{12} & F_{11} & F_{22} & F_{21} \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

y

$$[\mathbf{H}_\alpha] = \begin{bmatrix} (\mathbf{m}_\alpha)_{1,1} \\ (\mathbf{m}_\alpha)_{1,2} \\ (\mathbf{m}_\alpha)_{2,1} \\ (\mathbf{m}_\alpha)_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (3.123)$$

Las componentes del esfuerzo y del tensor constitutivo tangente, son calculados mediante el algoritmo de mapeo de retorno radial. Luego, al utilizar las bases (3.44),  $[\tilde{\mathbf{Z}}_t]$  se pueden expresar como

$$[\tilde{\mathbf{Z}}_t] = |E|[\bar{\mathbf{H}}]^\top [\bar{\mathbf{F}}]^\top [\mathbf{D}_T][\bar{\mathbf{F}}][\bar{\mathbf{H}}] + |E|[\bar{\mathbf{H}}]^\top [\bar{\mathbf{S}}][\bar{\mathbf{H}}], \quad (3.124)$$

donde

$$[\bar{\mathbf{H}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.125)$$

Finalmente, similar a los casos anteriores, la matriz de rigidez tangente de consistencia para deformaciones finitas se deduce como sigue:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{T,E}^c] &= [\mathbf{\Pi}]^\top [\tilde{\mathbf{Z}}_t][\mathbf{\Pi}] \\ &= |E|[\mathbf{\Pi}]^\top [\bar{\mathbf{H}}]^\top [\bar{\mathbf{F}}]^\top [\mathbf{D}_T][\bar{\mathbf{F}}][\bar{\mathbf{H}}][\mathbf{\Pi}] + |E|[\mathbf{\Pi}]^\top [\bar{\mathbf{H}}]^\top [\bar{\mathbf{S}}][\bar{\mathbf{H}}][\mathbf{\Pi}], \\ &= |E|[\bar{\mathbf{W}}_E]^\top [\bar{\mathbf{F}}]^\top [\mathbf{D}_T][\bar{\mathbf{F}}][\bar{\mathbf{W}}_E] + |E|[\bar{\mathbf{W}}_E]^\top [\bar{\mathbf{S}}][\bar{\mathbf{W}}_E] \end{aligned} \quad (3.126)$$

donde se definió

$$[\bar{\mathbf{W}}_E] = [\bar{\mathbf{H}}][\mathbf{\Pi}]. \quad (3.127)$$

El procedimiento para encontrar el vector de fuerzas internas para deformaciones finitas es similar al procedimiento del vector de fuerzas internas para deformaciones infinitesimales, pero utilizando la versión finita de la forma débil (3.7). Se parte de la forma débil descompuesta no lineal a nivel de un elemento (el tercer término del lado derecho de la ecuación (3.85), junto con el primer término del lado derecho de la ecuación (3.82)), al discretizar los desplazamientos mediante la ecuación (3.43), junto con la aplicación de la propiedad de la linealidad respecto a  $\mathbf{v}^h$ , como sigue:

$$\begin{aligned}
a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \Pi \mathbf{v}^h) &= a_E \left( \{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \sum_{j=1}^{2n} v_j \Pi \boldsymbol{\varphi}_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{2n} v_j a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}, \Pi \mathbf{u}^h; \Pi \mathbf{u}^h, \Pi \boldsymbol{\varphi}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{2n} v_j [\mathbf{f}_{INT,E}^c]_j,
\end{aligned} \tag{3.128}$$

donde se definió  $[\mathbf{f}_{INT,E}^c]_j$  como la componente  $j$  de la matriz de fuerzas internas de consistencia  $[\mathbf{f}_{INT,E}^c]$  para un elemento  $E$ . Luego, utilizando (3.47), la componente de la matriz de fuerzas internas se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{f}_{INT,E}^c]_j &= a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \Pi \boldsymbol{\varphi}_j) \\
&= a_E \left( \{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \sum_{\beta=1}^{n_k} s_j^\beta \mathbf{m}_\beta \right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n_k} s_j^\beta a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n_k} [\boldsymbol{\Pi}]_{\beta j} a_E^*(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n_k} [\boldsymbol{\Pi}]_{\beta j} [\tilde{\mathbf{Z}}_F]_\beta \\
&= ([\boldsymbol{\Pi}]^\top [\tilde{\mathbf{Z}}_F])_j,
\end{aligned} \tag{3.129}$$

donde se definió  $a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\beta) = [\tilde{\mathbf{Z}}_F]_\beta$ , que también se puede expresar como

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathbf{Z}}_F]_\beta &= a_E(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \Pi \mathbf{u}^h, \mathbf{m}_\beta) \\
&= \int_E \mathbf{S}(\Pi \mathbf{u}^h) : \overline{\mathbf{E}}(\Pi \mathbf{u}, \mathbf{m}_\beta) \, d\Omega \\
&= \int_E \mathbf{F}^\top(\Pi \mathbf{u}^h) \nabla \mathbf{m}_\beta : \mathbf{S}(\Pi \mathbf{u}^h) \, d\Omega \\
&= \int_E [\mathbf{H}_\beta]^\top [\overline{\mathbf{F}}] [\hat{\mathbf{S}}] \, d\Omega \\
&= |E| [\mathbf{H}_\beta]^\top [\overline{\mathbf{F}}] [\hat{\mathbf{S}}],
\end{aligned} \tag{3.130}$$

donde

$$[\hat{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} S_{11}(\Pi \mathbf{u}^h) \\ S_{22}(\Pi \mathbf{u}^h) \\ S_{12}(\Pi \mathbf{u}^h) \end{bmatrix}. \tag{3.131}$$

Luego, al utilizar las bases (3.44), la ecuación (3.130) se pueden expresar como

$$[\tilde{\mathbf{Z}}_F] = |E| [\overline{\mathbf{H}}]^\top [\overline{\mathbf{F}}] [\hat{\mathbf{S}}]. \tag{3.132}$$

Finalmente, similar a la deducción de la matriz de rigidez tangente de consistencia, el vector de fuerzas internas de consistencia para deformaciones finitas, se deduce como sigue:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{f}_{INT,E}^c] &= [\boldsymbol{\Pi}]^\top [\tilde{\mathbf{Z}}_F] \\
&= |E| [\boldsymbol{\Pi}]^\top [\overline{\mathbf{H}}]^\top [\overline{\mathbf{F}}] [\hat{\mathbf{S}}]. \\
&= |E| [\overline{\mathbf{W}}_E]^\top [\overline{\mathbf{F}}] [\hat{\mathbf{S}}]
\end{aligned} \tag{3.133}$$

### 3.5.3. Vector de fuerzas externas

En este trabajo se considera aplicaciones de cargas externas no dependientes del desplazamiento. De este modo, la formulación de las matrices-columnas de las cargas externas es la misma tanto para el caso infinitesimal como para el caso finito, ya sea para elasticidad o plasticidad. La aproximación utilizada se construye proyectando la función de peso  $\mathbf{v}^h$  sobre las constantes, al igual que el vector de densidad de fuerza impuesto  $\hat{\mathbf{t}}$  para las fuerzas superficiales y la fuerza de cuerpo  $\mathbf{b}$  para las fuerzas de cuerpo. La matriz-columna para las fuerzas de cuerpo se aproximan como

$$\ell_{\mathbf{b},E}(\mathbf{v}^h) \approx \int_E \Pi_o \mathbf{b} \cdot \Pi_o \mathbf{v}^h \, d\Omega \quad \rightarrow \quad [\mathbf{f}_{\mathbf{b},E}] = |E| [\overline{\mathbf{N}}]^\top [\overline{\mathbf{b}}], \tag{3.134}$$

donde

$$[\bar{\mathbf{b}}] = \frac{1}{|E|} \int_E \mathbf{b} \, d\Omega, \quad (3.135)$$

y

$$[\bar{\mathbf{N}}] = [[\bar{\mathbf{N}}_1] \quad [\bar{\mathbf{N}}_2] \quad \cdots \quad [\bar{\mathbf{N}}_n]], \quad [\bar{\mathbf{N}}_a] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

Similarmente, la matriz-columna para las fuerzas superficiales se aproximan como

$$\ell_{\mathbf{t},E}(\mathbf{v}^h) \approx \int_{e \in \mathcal{S}_t^h} \Pi_o \hat{\mathbf{t}} \cdot \Pi_o \mathbf{v}^h \, d\Gamma \quad \rightarrow \quad [\mathbf{f}_{\mathbf{t},E}] = |e| [\bar{\mathbf{N}}_\Gamma]^\top [\bar{\mathbf{t}}], \quad (3.137)$$

donde

$$[\bar{\mathbf{t}}] = \frac{1}{|e|} \int_{e \in \mathcal{S}_t^h} \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma, \quad (3.138)$$

y

$$[\hat{\mathbf{N}}_\Gamma] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.139)$$

### 3.5.4. Matriz de estabilidad

Uno de los ingredientes importantes en el método del elemento virtual, es la construcción de la matriz de estabilidad que asegura la convergencia. Para el caso de deformaciones infinitesimales, esta matriz se construye utilizando un operador adecuado capaz de "factorizar" las funciones de base canónicas desde el operador de proyección, permitiendo extraer una matriz de rigidez no computable con el propósito de aproximarla mediante una matriz computable. Tomando en cuenta que [16, 54]

$$\begin{aligned} \Pi \varphi_i &= \sum_{\alpha=1}^{n_k} s_i^\alpha \mathbf{m}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n_k} s_i^\alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{X}_j) \varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^n [\Pi_p]_{ij} [\mathbf{N}]_j, \end{aligned} \quad (3.140)$$

donde

$$[\mathbf{N}] = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_n]^\top, \quad (3.141)$$

se define que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Pi}_p]_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^{n_k} s_i^\alpha \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{X}_j) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_k} [\mathbf{D}]_{i\alpha} [\mathbf{\Pi}]_{\alpha j} \\
&= ([\mathbf{D}][\mathbf{\Pi}])_{ij}
\end{aligned} \tag{3.142}$$

y

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1(\mathbf{X}_1) & \mathbf{m}_2(\mathbf{X}_1) & \cdots & \mathbf{m}_6(\mathbf{X}_1) \\ \mathbf{m}_1(\mathbf{X}_2) & \mathbf{m}_2(\mathbf{X}_2) & \cdots & \mathbf{m}_6(\mathbf{X}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m}_1(\mathbf{X}_n) & \mathbf{m}_2(\mathbf{X}_n) & \cdots & \mathbf{m}_6(\mathbf{X}_n) \end{bmatrix}. \tag{3.143}$$

luego,

$$[\mathbf{\Pi}_p] = [\mathbf{D}][\mathbf{\Pi}]. \tag{3.144}$$

La construcción de la matriz de rigidez elemental de estabilidad para deformaciones infinitesimales, al igual que la matriz de rigidez, parte de la forma débil a nivel de un elemento (segundo término del lado derecho de la ecuación (3.80) ) y al discretizar los desplazamientos mediante la ecuación (3.43) y (3.144), junto con la aplicación de las propiedades de la forma bilineal. De modo que:

$$\begin{aligned}
a_E(\mathbf{u}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h) &= a_E([\mathbf{N}]^\top [\mathbf{I}_{2n}] [\mathbf{a}] - [\mathbf{N}]^\top [\mathbf{\Pi}_p]^\top [\mathbf{a}], [\mathbf{N}]^\top [\mathbf{I}_{2n}] [\mathbf{b}] - [\mathbf{N}]^\top [\mathbf{\Pi}_p]^\top [\mathbf{b}]) \\
&= [\mathbf{b}]^\top ([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p]^\top)^\top a_E([\mathbf{N}], [\mathbf{N}]^\top) ([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p]^\top) [\mathbf{a}] \\
&\approx [\mathbf{b}]^\top ([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p]) [\mathbf{S}_E] ([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p]^\top) [\mathbf{a}] \\
&= s_E(\mathbf{u}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h),
\end{aligned} \tag{3.145}$$

donde  $a_E([\mathbf{N}], [\mathbf{N}]^\top) \approx [\mathbf{S}_E]$ ;  $[\mathbf{I}_{2n}]$  es una matriz diagonal  $n \times n$  cuyas entradas son matrices identidad  $2 \times 2$ ; y  $[\mathbf{a}] = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{2n}]^\top$ ,  $[\mathbf{b}] = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{2n}]^\top$  son los coeficientes para las funciones de desplazamiento y de peso, respectivamente. Finalmente, la matriz de estabilidad para deformaciones infinitesimales se expresa como

$$[\mathbf{K}_E^s] = ([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p]) [\mathbf{S}_E] ([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p]^\top), \tag{3.146}$$

la cual depende de  $[\mathbf{S}_E]$ , y se selecciona de tal forma que pueda entregar estabilidad y que sea capaz de mitigar la rigidez en el límite casi incompresible. Se utiliza [34, 57]

$$[\mathbf{S}_E]_{ij} = \begin{cases} \text{máx} \left( 1, \left( [\mathbf{W}_C]^\top [\tilde{\mathbf{D}}] [\mathbf{W}_C] \right)_{ij} \right) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (3.147)$$

donde

$$[\tilde{\mathbf{D}}] = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (3.148)$$

Para el caso de deformaciones finitas, la matriz de estabilidad se construye a partir de la descomposición directa de la función de densidad de energía [17, 52]

$$W(\mathbf{u}) = W(\Pi\mathbf{u}) + W(\mathbf{u}) - W(\Pi\mathbf{u}), \quad (3.149)$$

la cual se aproxima mediante

$$W(\mathbf{u}) \approx W(\Pi\mathbf{u}) + \hat{W}(\mathbf{u}) - \hat{W}(\Pi\mathbf{u}), \quad (3.150)$$

donde  $\hat{W}$  es un potencial de energía de deformación estabilizado modificado. El primer término del lado derecho de la ecuación (3.150) está relacionado con la forma débil de consistencia (matriz de rigidez de consistencia), y el segundo término del lado izquierdo está relacionado con la forma débil de estabilidad (matriz de rigidez de estabilidad). Luego, la forma integral asociada a la matriz de estabilidad a nivel de una celda de integración se aproxima como

$$\begin{aligned} s_E(\mathbf{u}^h - \Pi\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \Pi\mathbf{v}^h) &= \hat{a}_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - \hat{a}_E(\Pi\mathbf{u}^h, \Pi\mathbf{v}^h) \\ &= \sum_{i=1}^{n_s} \hat{a}_{E_i}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - \hat{a}_E(\Pi\mathbf{u}^h, \Pi\mathbf{v}^h), \end{aligned} \quad (3.151)$$

donde para el término izquierdo cada celda de integración  $E$  se descompone en  $n_s$  triángulos  $E_i$  de área  $|E_i|$ , y  $\hat{a}$  denota la forma débil asociada a la densidad de energía  $\hat{W}$ . La descomposición de la celda de integración en subdominios triangulares se fundamenta en la necesidad de calcular  $\mathbf{u}$ , la cual es solo conocida en los bordes de cada celda  $E$ . Luego, la estabilidad para deformaciones finitas se deduce al utilizar (3.151) junto con (3.84), (3.126) y (3.133), resultando la matriz de estabilidad tangente

$$[\mathbf{K}_E^S] = \sum_{i=1}^{n_s} [\hat{\mathbf{K}}_{T,E_i}^c] - [\hat{\mathbf{K}}_{T,E}^c], \quad (3.152)$$

y el vector de estabilidad de fuerzas internas

$$[\mathbf{f}_{INT,E}^S] = \sum_{i=1}^{n_s} [\hat{\mathbf{f}}_{INT,E_i}^c] - [\hat{\mathbf{f}}_{INT,E}^c]. \quad (3.153)$$

Se utiliza la energía de deformación de estabilización propuesta por van Huyssteen et al. [52]

$$\hat{W} = \frac{\hat{\mu}}{2}(I_C - 2 - 2\ln(J)) + \frac{\hat{\lambda}}{2}(J - 1)^2, \quad (3.154)$$

basada en el modelo de Neo-Hookean, donde  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\lambda}$  denotan parámetros de Lamé modificados dados por

$$\hat{\mu} = \Phi(1 + \alpha)^2 \mu, \quad (3.155)$$

$$\hat{\lambda} = \Phi T_5(\lambda), \quad (3.156)$$

que a su vez dependen de los parámetros de Lamé [52]

$$\lambda = \frac{E_y \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.157)$$

y

$$\mu = \frac{E_y}{2(1 + \nu)}, \quad (3.158)$$

en función de las constantes elásticas de elasticidad lineal y parámetros estabilizadores que dependen de la geometría de cada celda de integración  $E$ . La modificación de los parámetros de Lamé está orientada a que  $\hat{\lambda}$  se asemeje lo más posible a  $\lambda$  evitando el bloqueo volumétrico en el límite casi incompresible cuando  $\nu \rightarrow 0.5$ . Para lograr esto, se utiliza una expansión en series de Taylor de quinto orden

$$T_n(\lambda) = \lambda(v_0) + \sum_{i=1}^{n_t} \left. \frac{\partial^i \lambda}{\partial \nu^i} \right|_{\nu_0} \frac{(\nu - \nu_0)^i}{i!}, \quad (3.159)$$

donde  $n_t$  es el orden de la expansión, y se ha reportado  $v_0 = -0.25$  para mayor generalidad [52]. El parámetro estabilizador  $\Theta$  se define como

$$\Theta = 2(1 + \nu) \frac{1}{AR^2}, \quad (3.160)$$

donde  $AR = R_0/R_i$  es la razón de aspecto de una celda de integración, calculada con radio mayor  $R_0$  y el radio menor  $R_i$  de una elipse circunscrita a la celda. Luego, este parámetro  $\Theta$  es utilizado para calcular el factor de estabilizador definido por

$$\Phi = \frac{\Theta}{1 + \Theta}, \quad (3.161)$$

donde  $\alpha = T_5(\lambda)/E_y$ .

### 3.5.5. Matrices nodales

La forma débil nodal para elasticidad lineal utilizando el operador de ponderación nodal, se expresa como:

$$a_I^h(\pi_I[\mathbf{u}^h], \pi_I[\mathbf{v}^h]) = a_I(\pi_I[\Pi\mathbf{u}^h], \pi_I[\Pi\mathbf{v}^h]) + s_I(\pi_I[\mathbf{u}^h - \Pi\mathbf{u}^h], \pi_I[\mathbf{v}^h - \Pi\mathbf{v}^h]). \quad (3.162)$$

En base a lo anterior, la matriz de rigidez de consistencia del esquema de integración nodal para elasticidad lineal se calcula como

$$[\mathbf{K}_I^c] = |I|[\mathbf{W}_I]^\top [\mathbf{D}][\mathbf{W}_I], \quad (3.163)$$

donde  $[\mathbf{W}_I] = \pi_I[[\mathbf{W}_E]]$ . Similarmente, la matriz de rigidez de estabilidad

$$[\mathbf{K}_I^s] = ([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p])_I [\mathbf{S}_I] ([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p]^\top)_I, \quad (3.164)$$

donde  $[\mathbf{S}_I] = \pi_I[[\mathbf{S}_E]]$  y  $([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p])_I = \pi_I([[\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p]])$ . Las matrices-columnas de fuerzas externas de cuerpo y de densidad de fuerza son, respectivamente

$$[\mathbf{f}_{b,I}] = |I|[\overline{\mathbf{N}}_I]^\top [\overline{\mathbf{b}}_I], \quad (3.165)$$

y

$$[\mathbf{f}_{t,I}] = |I_\Gamma|[\overline{\mathbf{N}}_{\Gamma,I}]^\top [\overline{\mathbf{t}}_I], \quad (3.166)$$

donde  $[\overline{\mathbf{N}}_I] = \pi_I[[\overline{\mathbf{N}}]]$ ,  $[\overline{\mathbf{b}}_I] = \pi_I[[\overline{\mathbf{b}}]]$ ,  $[\overline{\mathbf{N}}_{\Gamma,I}] = \pi_I[[\overline{\mathbf{N}}_\Gamma]]$  y  $[\overline{\mathbf{t}}_I] = \pi_I[[\overline{\mathbf{t}}]]$ . Luego, denotando como  $\mathcal{T}^n$  al conjunto de los nodos de la partición, la ecuación matricial de equilibrio para elasticidad lineal se escribe como

$$\sum_{I \in \mathcal{T}^n} \{[\mathbf{K}_I^c] + [\mathbf{K}_I^s]\} [\mathbf{a}] = \sum_{I \in \mathcal{T}^n} \{[\mathbf{f}_{b,I}] + [\mathbf{f}_{t,I}]\}. \quad (3.167)$$

Similarmente, la forma débil nodal para mecánica de sólidos no lineal se expresa como:

$$a_I^h(\{\boldsymbol{\alpha}\}_I; \pi_I[\mathbf{u}^h], \pi_I[\mathbf{v}^h]) = a_I(\{\boldsymbol{\alpha}\}; \pi_I[\Pi\mathbf{u}^h], \pi_I[\Pi\mathbf{v}^h]) + s_I(\pi_I[\mathbf{u}^h - \Pi\mathbf{u}^h], \pi_I[\mathbf{v}^h - \Pi\mathbf{v}^h]). \quad (3.168)$$

donde  $\{\boldsymbol{\alpha}\}_I$  denota un conjunto de variables internas para el caso plástico, que son evaluadas y almacenadas directamente en el nodo  $I$ . La matriz de rigidez tangente de consistencia nodal y la matriz-columna de fuerzas internas nodal para elastoplasticidad infinitesimal son, respectivamente

$$[\mathbf{K}_{t,I}^c] = |I|[\mathbf{W}_I]^\top [\check{\mathbf{D}}_t][\mathbf{W}_I]. \quad (3.169)$$

y

$$[\mathbf{f}_{int,I}^c] = |I|[\mathbf{W}_I]^\top [\check{\boldsymbol{\sigma}}], \quad (3.170)$$

donde  $[\check{\mathbf{D}}_t]$  es una matriz con las componentes del tensor constitutivo tangente elastoplástico infinitesimal,  $[\check{\boldsymbol{\sigma}}]$  una matriz-columna con las componentes del tensor de esfuerzo, similares a (3.106) y (3.112) respectivamente, pero calculadas en el nodo  $I$  utilizando la deformación nodal ponderada (3.88). Por otro lado, la matriz-columna de estabilidad de fuerza internas nodal es

$$[\mathbf{f}_{int,I}^s] = ([\mathbf{I}_{2n}] - [\boldsymbol{\Pi}_p])_I [\mathbf{S}_I] ([\mathbf{I}_{2n}] - [\boldsymbol{\Pi}_p]^\top)_I [\mathbf{a}]. \quad (3.171)$$

Luego, la ecuación matricial nodal de equilibrio incremental para elastoplasticidad infinitesimal se escribe como:

$$\sum_{I \in \mathcal{T}^n} \left\{ [\mathbf{K}_{t,I}^c] + [\mathbf{K}_I^s] \right\} [\Delta \mathbf{a}] = - \sum_{I \in \mathcal{T}^n} \left\{ [\mathbf{f}_{int,I}^s] + [\mathbf{f}_{int,I}^c] - [\mathbf{f}_{b,I}] - [\mathbf{f}_{t,I}] \right\}. \quad (3.172)$$

Las matrices para el caso con deformaciones finitas, se utiliza  $[\overline{\mathbf{W}}_I] = \pi_I[[\overline{\mathbf{W}}_E]]$ , resultando la matriz tangente de consistencia nodal y la matriz-columna de fuerza internas nodal, respectivamente:

$$[\mathbf{K}_{T,I}^c] = |I|[\overline{\mathbf{W}}_I]^\top [\overline{\mathbf{F}}_I]^\top [\check{\mathbf{D}}_T][\overline{\mathbf{F}}_I][\overline{\mathbf{W}}_I] + |I|[\overline{\mathbf{W}}_I]^\top [\check{\mathbf{S}}][\overline{\mathbf{W}}_I], \quad (3.173)$$

y

$$[\mathbf{f}_{INT,I}^c] = |I|[\overline{\mathbf{W}}_I]^\top [\overline{\mathbf{F}}_I][\check{\mathbf{S}}]. \quad (3.174)$$

donde  $[\check{\mathbf{D}}_T]$  es una matriz con las componentes del tensor constitutivo tangente finito,  $[\check{\mathbf{S}}]$  una matriz-columna con las componentes del tensor de esfuerzo, y  $[\check{\mathbf{S}}]$  es una matriz con las componentes del tensor de esfuerzo, similares a (3.120), (3.131) y (3.121) respectivamente, pero calculadas en el nodo  $I$  utilizando el tensor gradiente de deformación nodal ponderado (3.4). Similarmente, la matriz de estabilidad tangente nodal para deformaciones finitas

$$[\mathbf{K}_I^S] = \sum_{i=1}^{n_s} [\hat{\mathbf{K}}_{T,I_i}^c] - [\hat{\mathbf{K}}_{T,I}^c], \quad (3.175)$$

y la matriz-columna de estabilidad nodal de fuerzas internas

$$[\mathbf{f}_{INT,I}^S] = \sum_{i=1}^{n_s} [\hat{\mathbf{f}}_{INT,I_i}^c] - [\hat{\mathbf{f}}_{INT,I}^c]. \quad (3.176)$$

Luego, la ecuación matricial nodal de equilibrio incremental para deformaciones finitas se escribe como:

$$\sum_{I \in \mathcal{T}^n} \left\{ [\mathbf{K}_{T,I}^c] + [\mathbf{K}_I^S] \right\} [\Delta \mathbf{a}] = - \sum_{I \in \mathcal{T}^n} \left\{ [\mathbf{f}_{INT,I}^s] + [\mathbf{f}_{INT,I}^c] - [\mathbf{f}_{b,I}] - [\mathbf{f}_{t,I}] \right\}. \quad (3.177)$$

### 3.5.6. Simetría en el eje

Las matriz de rigidez para el caso de simetría en el eje de *VEM* y *NVEM* se construyen siguiendo el mismo procedimiento estándar utilizado en el método de los elementos finitos. Esto se hace agregando componentes adicionales en la matriz de deformación (3.127), en la matriz de las componentes del tensor gradiente de deformación (3.122), en la matriz de las componentes del esfuerzo (3.121), (3.131), y en la matriz de las componentes del tensor constitutivo tangente (3.120). Estas componentes adicionales son las que consideran las componentes angular de las coordenadas cilíndricas en el contexto de la simetría en el eje. De esta manera, para la aproximación de simetría en el eje, se consiguen la matriz con las componentes del tensor constitutivo tangente

$$[\mathbf{D}_{T,axis}] = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} & D_{1133} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} & D_{2233} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} & D_{1233} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3312} & D_{3333} \end{bmatrix}, \quad (3.178)$$

la matriz con las componentes del tensor gradiente de deformación

$$[\overline{\mathbf{F}}_{axis}] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & F_{21} & 0 & 0 \\ 0 & F_{12} & 0 & F_{22} & 0 \\ F_{12} & F_{11} & F_{22} & F_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.179)$$

las matrices con las componentes del tensor de esfuerzo

$$[\hat{\mathbf{S}}_{axis}] = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.180)$$

$$[\bar{\mathbf{S}}_{axis}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.181)$$

y la matriz de deformación

$$[\bar{\mathbf{W}}_{E,axis}] = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{W}}_E] \\ [\bar{\mathbf{W}}_{E,r}] \end{bmatrix}, \quad (3.182)$$

$$[\bar{\mathbf{W}}_{E,r}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_c n} & 0 & \frac{1}{R_c n} & 0 & \cdots & \frac{1}{R_c n} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.183)$$

donde  $R_c$  es la distancia desde el eje de simetría al centro de la celda de integración,  $n$  la cantidad de nodos por celda, y la matriz  $[\bar{\mathbf{W}}_{E,r}]$  tiene dimensiones  $1 \times 2n$ . En el contexto de las coordenadas cilíndricas, las componentes 3 de los tensores corresponden a la componente angular  $\Theta$ , las componentes 1 de los tensores corresponden a la componente  $R$ , y las componentes 2 corresponde a  $Z$ . Con lo anterior, la matriz de rigidez tangente y la matriz columna de fuerzas internas para la aproximación de simetría en el eje para el método del elemento virtual son, respectivamente,

$$[\mathbf{K}_{T,E,axis}^c] = 2\pi R|E|[\bar{\mathbf{W}}_{E,axis}]^\top [\bar{\mathbf{F}}_{axis}]^\top [\mathbf{D}_{T,axis}] [\bar{\mathbf{F}}_{axis}] [\bar{\mathbf{W}}_{E,axis}] + 2\pi R|E|[\bar{\mathbf{W}}_{E,axis}]^\top [\bar{\mathbf{S}}_{axis}] [\bar{\mathbf{W}}_{E,axis}], \quad (3.184)$$

y

$$[\mathbf{f}_{INT,E,axis}^c] = 2\pi R|E|[\bar{\mathbf{W}}_{E,axis}]^\top [\bar{\mathbf{F}}_{axis}] [\hat{\mathbf{S}}_{axis}]. \quad (3.185)$$

La matriz de estabilidad tangente y la matriz de estabilidad de fuerzas internas se construyen adaptando las matrices de estabilidad de la sección anterior a la aproximación de simetría en el eje. La matriz de rigidez tangente de estabilidad y la matriz columna de fuerza internas de estabilidad para el método del elemento virtual, son, respectivamente:

$$[\mathbf{K}_{E,axis}^S] = 2\pi R[\mathbf{K}_E^S], \quad (3.186)$$

y

$$[\mathbf{f}_{INT,E,axis}^S] = 2\pi R[\mathbf{f}_{INT,E}^S]. \quad (3.187)$$

Luego, utilizando el operador ponderación nodal sobre las matrices anteriores se obtienen las matrices nodales para la aproximación de simetría en el eje. La matriz de rigidez de consistencia nodal y la matriz columna de fuerza internas de consistencia nodal, son, respectivamente:

$$[\mathbf{K}_{T,I,axis}^c] = |I|[\overline{\mathbf{W}}_{I,axis}]^\top [\overline{\mathbf{F}}_{I,axis}]^\top [\check{\mathbf{D}}_{T,axis}] [\overline{\mathbf{F}}_{I,axis}] [\overline{\mathbf{W}}_{I,axis}] + |I|[\overline{\mathbf{W}}_{I,axis}]^\top [\check{\mathbf{S}}_{axis}] [\overline{\mathbf{W}}_{I,axis}], \quad (3.188)$$

y

$$[\mathbf{f}_{INT,I,axis}^c] = |I|[\overline{\mathbf{W}}_{I,axis}]^\top [\overline{\mathbf{F}}_{I,axis}] [\check{\mathbf{S}}_{axis}]. \quad (3.189)$$

Similarmente el caso anterior, las matrices de estabilidad nodal son

$$[\mathbf{K}_{I,axis}^S] = 2\pi R_I[\mathbf{K}_I^S], \quad (3.190)$$

y

$$[\mathbf{f}_{INT,I,axis}^S] = 2\pi R_I[\mathbf{f}_{INT,I}^S]. \quad (3.191)$$

donde  $R_I$  es la distancia desde el eje de simetría al nodo  $I$ .

### 3.5.7. Matriz de masa e integración temporal

Para un problema dinámico general, la ecuación de movimiento matricial esta dada por:

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{u}}] + [\mathbf{C}][\dot{\mathbf{u}}] + [\mathbf{K}\mathbf{u}] = [\mathbf{F}] \quad (3.192)$$

donde  $[\mathbf{M}]$  es la matriz de masa,  $[\mathbf{C}]$  es la matriz de amortiguamiento,  $[\mathbf{K}]$  es la matriz de rigidez,  $[\mathbf{F}]$  es un vector columna de fuerzas externas,  $[\ddot{\mathbf{u}}]$  es el vector columna con los coeficientes de aceleración,  $[\dot{\mathbf{u}}]$  es un vector columna con los coeficientes de velocidad y  $[\mathbf{u}]$  es un vector columna con los coeficientes de desplazamiento. Matemáticamente, la Ecuación (3.192) representa un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, el cual puede abordarse mediante métodos numéricos para la integración en el tiempo. Un esquema comúnmente implementado en programas comerciales es el método de Newmark, basado en las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+1} = \dot{\mathbf{u}}_t + ((1 - \gamma_t)\Delta t)\ddot{\mathbf{u}}_t + (\gamma_t\Delta t)\ddot{\mathbf{u}}_{t+1}, \quad (3.193)$$

$$\mathbf{u}_{t+1} = \mathbf{u}_t + (\Delta t)\dot{\mathbf{u}}_t + ((0.5 - \beta_t)\Delta t^2)\ddot{\mathbf{u}}_t + (\beta_t\Delta t^2)\ddot{\mathbf{u}}_{t+1}, \quad (3.194)$$

donde  $\gamma_t$  y  $\beta_t$  son parámetros que determinan la precisión y estabilidad del método. Para  $\gamma_t = 1/2$  y  $\beta_t = 1/4$  corresponde al método del promedio constante de la aceleración. Mientras que para  $\gamma_t = 1/2$  y  $\beta_t = 1/6$  corresponde al método de aceleración lineal. Para completar la ecuación (3.192) se requiere una matriz de masa, se utiliza [55]

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_E] &= [\mathbf{M}_E^c] + [\mathbf{M}_E^s] \\ &= \rho|E|([\mathbf{N}][\mathbf{\Pi}_p])^\top([\mathbf{N}][\mathbf{\Pi}_p]) + \rho|E|([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p])([\mathbf{I}_{2n}] - [\mathbf{\Pi}_p])^\top, \end{aligned} \quad (3.195)$$

donde  $[\mathbf{M}_E^c]$  es la matriz de masa de consistencia, y  $[\mathbf{M}_E^s]$  es la matriz de masa de estabilidad. La matriz de masa de consistencia de masa requiere ser calculada mediante sub-triangulación, y la matriz de estabilidad de masa se calcula similar a la matriz de estabilidad para elasticidad lineal.

# Capítulo 4

## Ejemplos numéricos y análisis

En esta sección se presenta, compara y discuten varios ejemplos numéricos implementados con el esquema *NVEM*, y otros esquemas estándar basados en desplazamiento [52, 58, 59, 57], tanto para los problemas elástico lineales, elastoplásticos infinitesimales, hiperelásticos, y elastoplásticos con deformaciones finitas. Las mallas utilizadas se generaron mediante el programa *Gmsh*. Las mallas de polígonos de más de cuatro lados se generaron en base a mallas de triángulos, las cuales se procesaron mediante un algoritmo en donde el centroide de cada triángulo se utilizó como vértices para construir la malla de polígonos. Los esquemas se implementaron en el lenguaje de programación *c++*, y para la visualización gráfica de los resultados se utilizó el programa *Paraview*.

### 4.1. Elasticidad lineal

#### 4.1.1. Viga en voladizo

Una viga en voladizo con espesor unitario y una carga parabólica en uno de sus extremos es utilizada para el estudio de convergencia bajo el refinamiento sucesivo de la malla. La Figura 4.1(a) muestra un esquema de la geometría y condiciones de contorno del problema. Las condiciones de contorno esenciales en el lado fijo  $x = 0$  de la viga se aplican según la solución:

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{Py}{6\bar{E}_y I} \left( (6L - 3x)x + (2 + \bar{\nu})y^2 - \frac{3D^2}{2}(1 + \bar{\nu}) \right), \\u_y &= -\frac{P}{6\bar{E}_y I} \left( 3\bar{\nu}y^2(L - x) + (3L - x)x^2 \right),\end{aligned}\tag{4.1}$$

con  $\bar{E}_y = E_y/(1 - \nu)$  y  $\bar{\nu} = \nu(1 - \nu)$  para un estado de deformación plana, donde  $E_y$  es el módulo de elasticidad,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $L$  es el largo de la viga,  $I$  es el segundo momento de área de la viga,  $D$  es el ancho, y  $P$  la carga aplicada en  $x = L$ . Las componentes

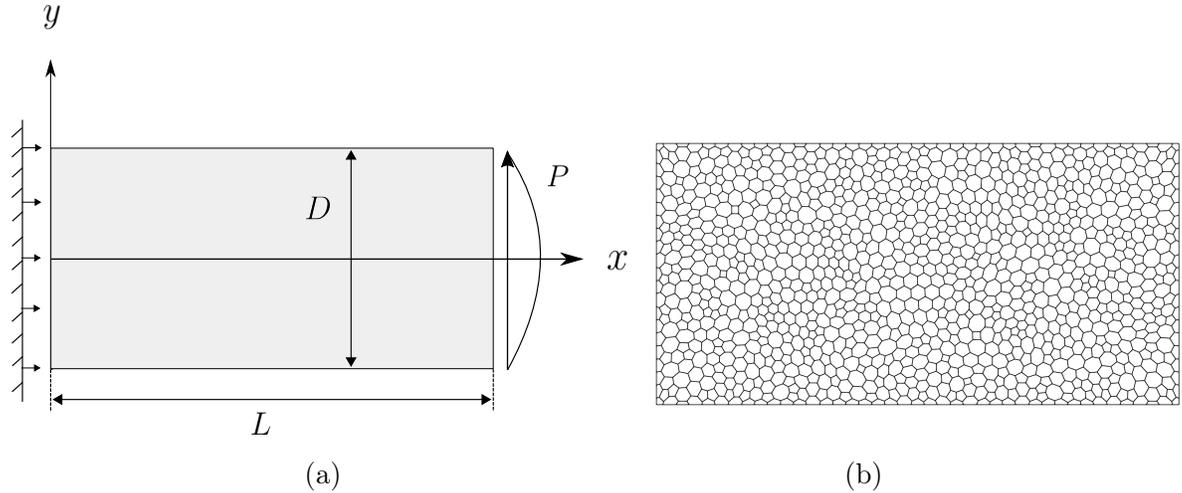


Figura 4.1: Problema de viga en voladizo: (a) Esquema del problema con condiciones de borde y (b) malla de ejemplo.

de esfuerzo exactas estan dadas por

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{P(L-x)y}{I}, \\
 \sigma_y &= 0, \\
 \sigma_{xy} &= \frac{P(D^2/4 - y^2)}{2I}.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

La carga parabólica en el lado de la tracción tangencial se impone utilizando  $\sigma_{xy}$  de (4.2). Para el estudio de convergencia se considera  $D = 4 \text{ in}$ ,  $L = 8 \text{ in}$ ,  $P = -1000 \text{ lbf}$ , además se evalúan dos conjuntos de constantes elástica. El primer conjunto, correspondiente al caso compresible, tiene  $E = 10^7 \text{ psi}$  y  $\nu = 0.3$ ; mientras que el segundo conjunto, correspondiente al caso casi-incompresible, tiene  $E = 10^7 \text{ psi}$  y  $\nu = 0.499999$ . Una malla de ejemplo se muestra en la Figura 4.1(b). La Figura 4.2 muestra gráficas de la norma  $L^2$  y la seminorma  $H^1$  tanto para el caso compresible y casi-incompresible. Para el caso compresible, los esquemas *NVEM*, *VEM* [57] y *VEM B - Bar* [59] muestran tasas de convergencia óptimas, donde *VEM* y *VEM B - Bar* tienen mayor precisión que *NVEM* en la norma  $L^2$ , mientras que en la seminorma  $H^1$  los tres esquemas tienen precisiones similares. Para el caso incompresible, las precisiones son similares, exceptuando para el esquema *VEM*, el cual muestra una precisión baja y no describe una tasa de convergencia óptima al bloquear volumétricamente. La Figura 4.3 muestra los resultados gráficos de la magnitud del desplazamiento de los tres esquemas, mostrando claramente el bloqueo volumétrico en *VEM* para el caso incompresible.

#### 4.1.2. Placa con orificio

Este ejemplo consiste es una placa con un orificio de radio  $r_0$  centrado en el origen cargado al infinito por  $\sigma_x = T$ ,  $\sigma_y = \sigma_{xy} = 0$  según se esquematiza en la Figura 4.39. La solución

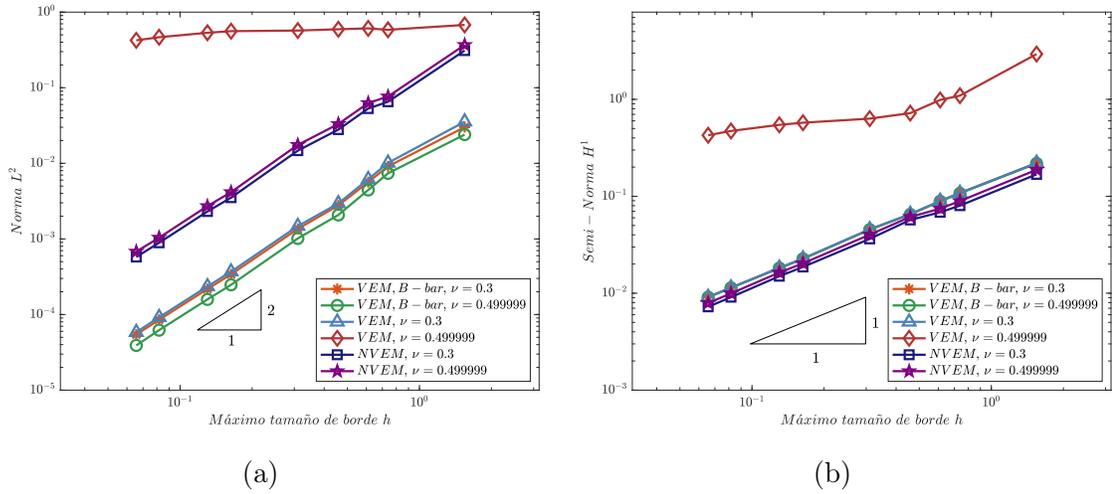


Figura 4.2: Tasas de convergencia para el problema de la viga en voladizo: (a) normal  $L^2$  y (b) seminormal  $H^1$ .

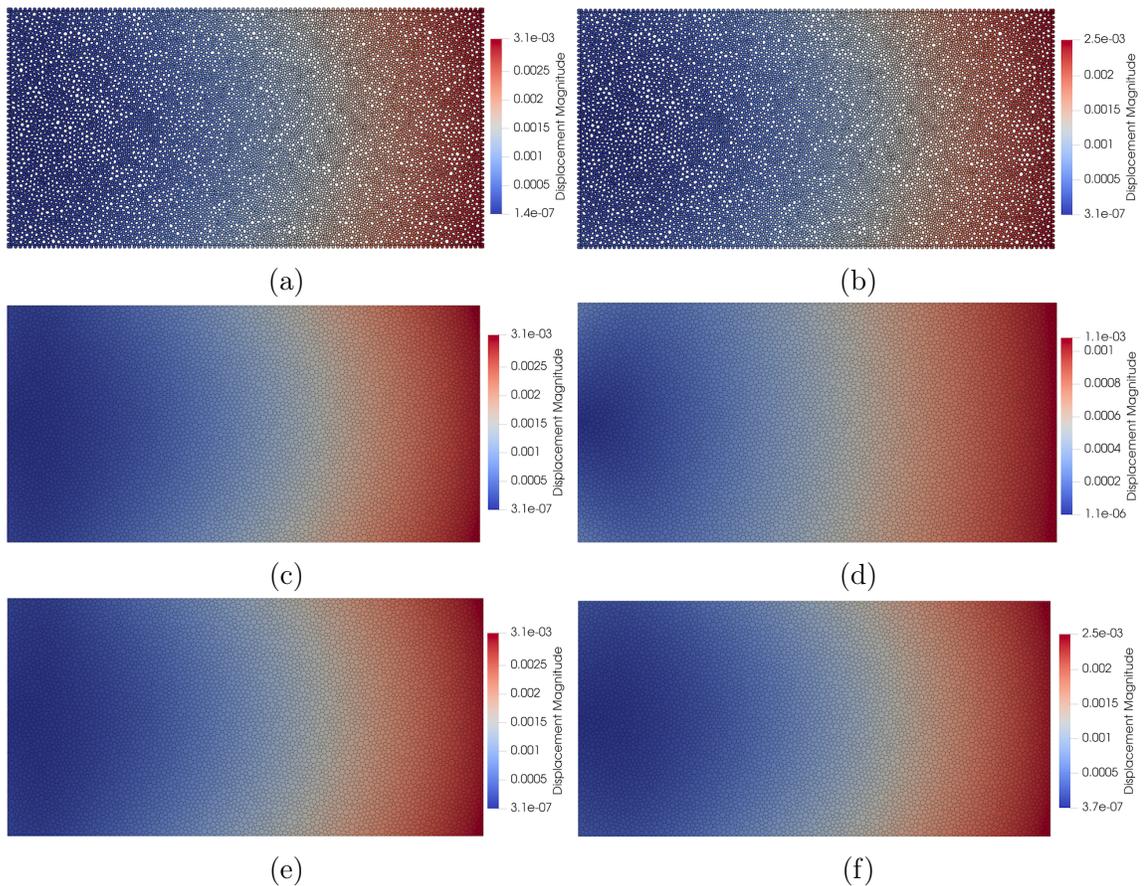


Figura 4.3: Resultados gráficos del problema de la viga en voladizo. En (a), (c) y (e) se muestra la magnitud del desplazamientos para los casos compresibles para los esquemas  $NVEM$ ,  $VEM$ , y  $VEM B-bar$  respectivamente. En (b), (d) y (f) se muestra la magnitud del desplazamientos para los casos incompresibles de los esquemas  $NVEM$ ,  $VEM$ , y  $VEM B-bar$  respectivamente

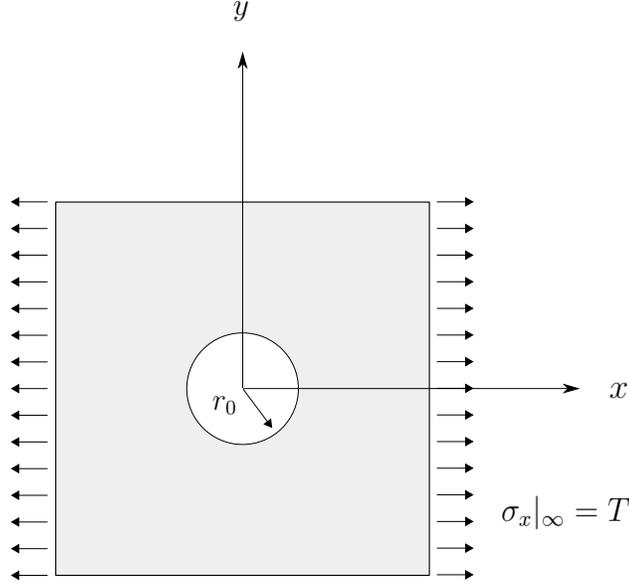


Figura 4.4: Esquema problema de la placa con orificio.

exacta esta dada por

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{T}{4\mu} \left( \frac{\kappa + 1}{2} r \cos(\theta) + \frac{r_0^2}{r} \left( (\kappa + 1) \cos(\theta) + \cos(3\theta) \right) - \frac{r_0^4}{r^3} \cos(3\theta) \right), \\
 u_y &= \frac{T}{4\mu} \left( \frac{\kappa - 3}{2} r \sin(\theta) + \frac{r_0^2}{r} \left( (\kappa - 1) \sin(\theta) + \sin(3\theta) \right) - \frac{r_0^4}{r^3} \sin(3\theta) \right),
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

con  $\mu = E_y/(2(1 + \nu))$  y  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  para el caso de deformación plana. Como se muestra la Figura 4.5(a), debido a sus dos ejes de simetría, sólo el primer cuadrante es modelado. Para su implementación, se impone el desplazamiento  $u_x = 0$  a lo largo de  $x = 0$  y  $u_y = 0$  a lo largo de  $y = 0$ . Las tracciones son impuestas en los otros dos bordes según la solución exacta de las componentes del esfuerzo. Las componentes del esfuerzos exactos estan dados por

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= T \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3r_0^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right), \\
 \sigma_y &= -T \left( \frac{r_0^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) + \frac{3r_0^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right), \\
 \sigma_{xy} &= -T \left( \frac{r_0^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) - \frac{3r_0^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para el estudio de convergencia se considera  $r_0 = 1 \text{ in}$ ,  $T = 100 \text{ psi}$  y  $a = 5 \text{ in}$ , además se evalúan dos conjuntos de constantes elástica. El primer conjunto, correspondiente al caso compresible, tiene  $E = 10^3 \text{ psi}$  y  $\nu = 0.3$ ; mientras que el segundo conjunto, correspondiente al caso casi-incompresible, tiene  $E = 10^3 \text{ psi}$  y  $\nu = 0.499999$ . Una malla de ejemplo se muestra en la Figura 4.5(b). La Figura 4.6 muestra gráficas de la norma  $L^2$  y la seminorma  $H^1$  tanto para el caso compresible y casi-incompresible. Para el caso compresible, los esquemas *NVEM*, *VEM* y *VEM B - Bar* muestran tasas de convergencia óptimas, donde *VEM* y *VEM B - Bar* tienen mayor precisión que *NVEM* en la norma  $L^2$ , mientras que en

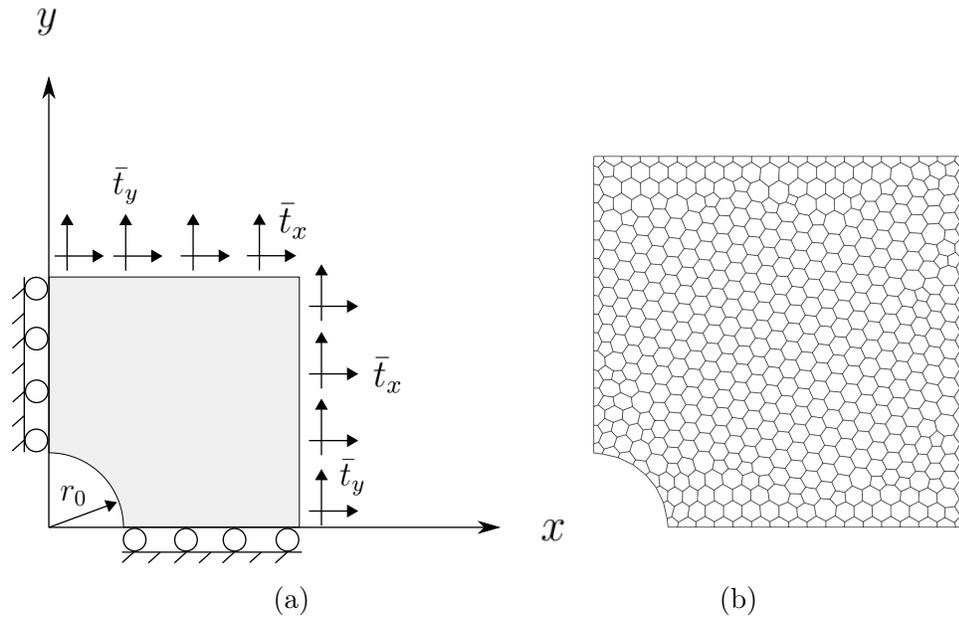


Figura 4.5: Problema placa con orificio: (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

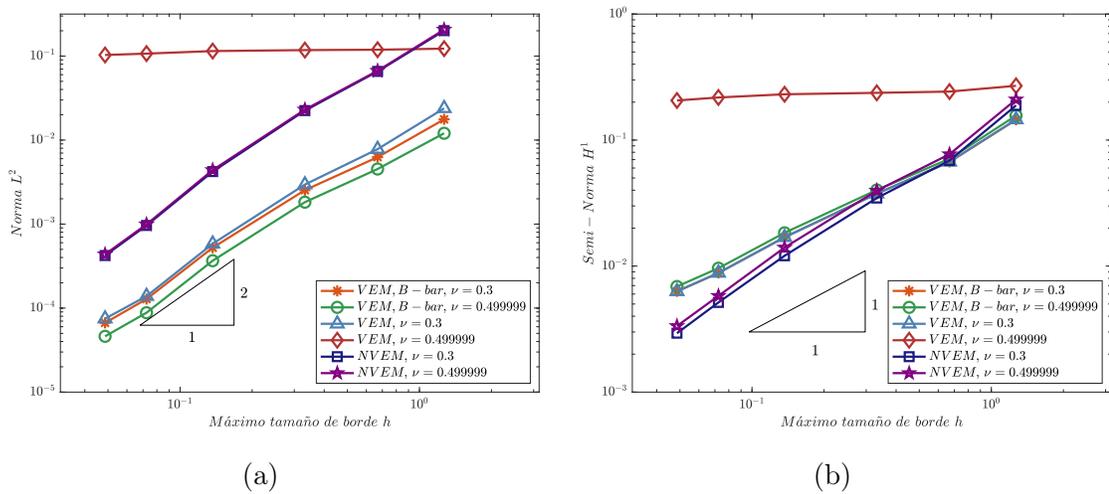


Figura 4.6: Tasas de convergencia para el problema de la placa con orificio: (a) normal  $L^2$  y (b) seminormal  $H^1$ .

la seminorma  $H^1$ ,  $NVEM$  muestra una precisión levemente superior. Para el caso incompresible, el comportamiento de las precisiones son similares ( $NVEM$  muestra una precisión levemente superior), exceptuando para el esquema  $VEM$ , el cual muestra una precisión baja y no describe una tasa de convergencia óptima al bloquear volumétricamente. La Figura 4.7 muestra los resultados gráficos del desplazamiento horizontal de los tres esquemas, mostrando el bloqueo volumétrico en  $VEM$  para el caso incompresible.

### 4.1.3. Cilindro de pared gruesa

Este ejemplo consiste en una representación de deformación plana (con espesor unitario) de un cilindro de pared gruesa sometido a presión interna. La geometría, las condiciones de contorno y la malla utilizadas en este ensayo numérico se muestran en la Figura 4.8, donde  $p$  es presión interna,  $r_i$  es el radio interior, y  $r_o$  es el radio exterior. La solución analítica esta dada por

$$u_r = \frac{(1 + \nu)r_i^2 p}{E_y(r_o^2 - r_i^2)} \left( \frac{r_o^2}{r} + r(1 - 2\nu) \right), \quad (4.5)$$

la cual esta expresada en coordenadas polares. Para el estudio de convergencia se considera  $r_i = 3 \text{ in}$ ,  $r_o = 9 \text{ in}$   $p = 10 \text{ psi}$ , además se evalúan dos conjuntos de constantes elásticas. El primer conjunto, correspondiente al caso compresible, tiene  $E = 10^3 \text{ psi}$  y  $\nu = 0.3$ ; mientras que el segundo conjunto, correspondiente al caso casi-incompresible, tiene  $E = 10^3 \text{ psi}$  y  $\nu = 0.499999$ . Una malla de ejemplo se muestra en la Figura 4.5(b).

La Figura 4.9 muestra gráficas de la norma  $L^2$  y la seminorma  $H^1$  tanto para el caso compresible y casi-incompresible. Para el caso compresible, los esquemas  $NVEM$ ,  $VEM$  y  $VEM B - Bar$  muestran tasas de convergencia óptimas, donde  $VEM$  y  $VEM B - Bar$  tienen mayor precisión que  $NVEM$  en la norma  $L^2$ , mientras que en la seminorma  $H^1$ , los tres esquemas muestran tasas similares. Para el caso incompresible, el comportamiento de las precisiones son similares, exceptuando para el esquema  $VEM$ , el cual muestra una precisión baja y no describe una tasa de convergencia óptima al bloquear volumétricamente. La Figura 4.10 muestra los resultados gráficos de la magnitud del desplazamiento de los tres esquemas, mostrando el bloqueo volumétrico en  $VEM$  para el caso incompresible.

## 4.2. Elastoplasticidad infinitesimal

### 4.2.1. Membrana de Cook

Este ejemplo consiste en una viga empotrada con sección transversal variable y una fuerza cortante en el otro extremo. Este ejemplo se utiliza para estudiar los esquemas numéricos bajo la combinación de flexión y cortante cuando el sólido deformable presenta comportamiento casi-incompresible. La geometría, las condiciones de contorno y un ejemplo malla utilizadas se muestran en la Figura 4.11, donde  $q = 3.6 \text{ N/mm}$  es la fuerza externa. Se supone espesor unitario y condición de deformación plana. El material empleado es elastoplástico bilineal, basado en el criterio de von Mises, con endurecimiento isotrópico lineal, con  $E = 1500 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.4999$   $S_y = 7.5 \text{ MPa}$ ,  $H = 3.25 \text{ MPa}$ . En este ejemplo se compara  $NVEM$ ,  $VEM$ , y el ya conocido desempeño de  $FEM Q4$ . Para este estudio, se compara el desplazamiento vertical del extremo superior derecho de la viga, en el punto  $A$  de la Figura 4.11(a). La Figura

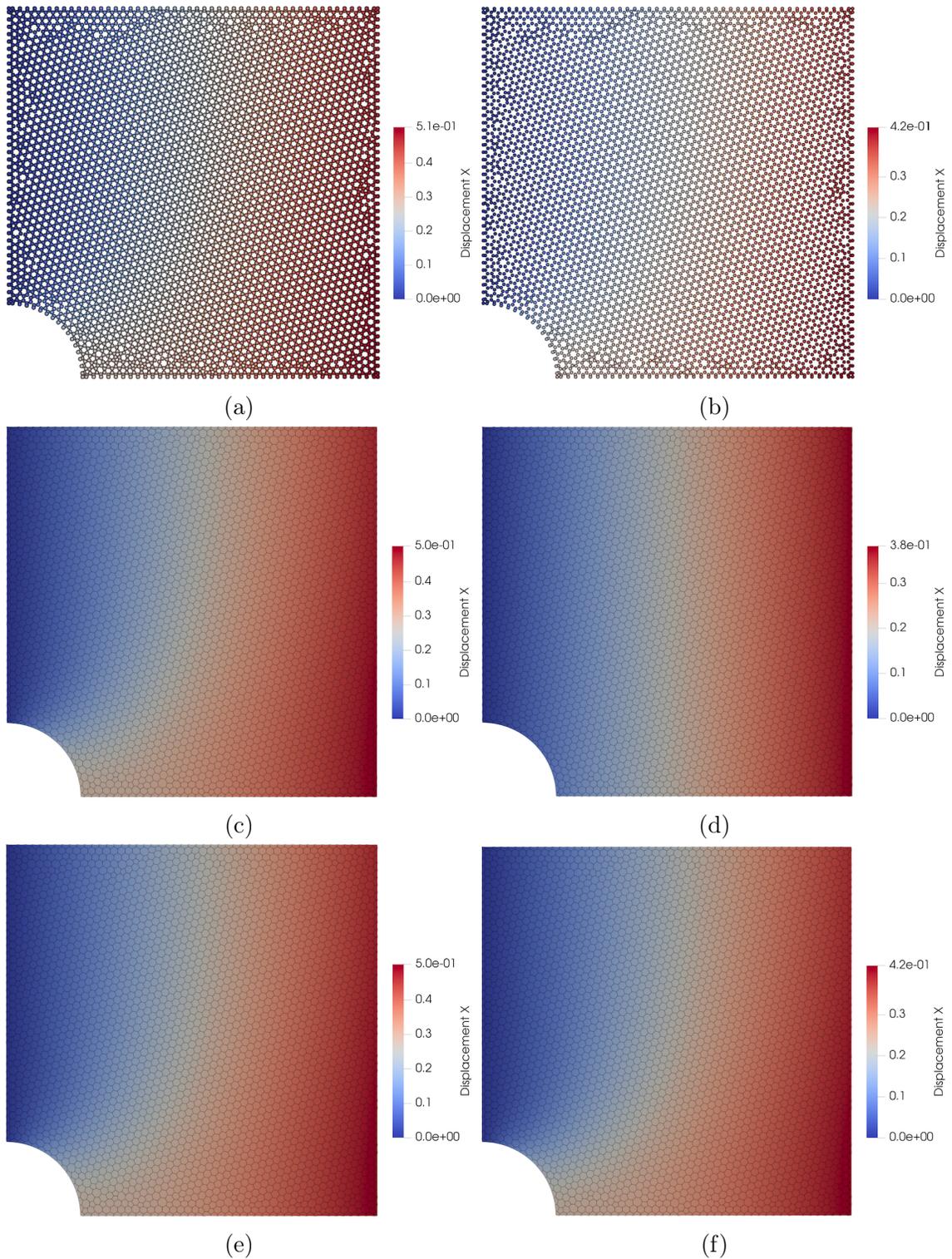


Figura 4.7: Resultados gráficos del problema de la placa con orificio. En (a), (c) y (e) se muestra la componentes horizontal del desplazamiento para los casos compresibles para los esquemas  $NVEM$ ,  $VEM$ , y  $VEM B - bar$  respectivamente. En (b), (d) y (f) se muestra la componentes horizontal del desplazamientos para los casos incompresibles de los esquemas  $NVEM$ ,  $VEM$ , y  $VEM B - bar$  respectivamente

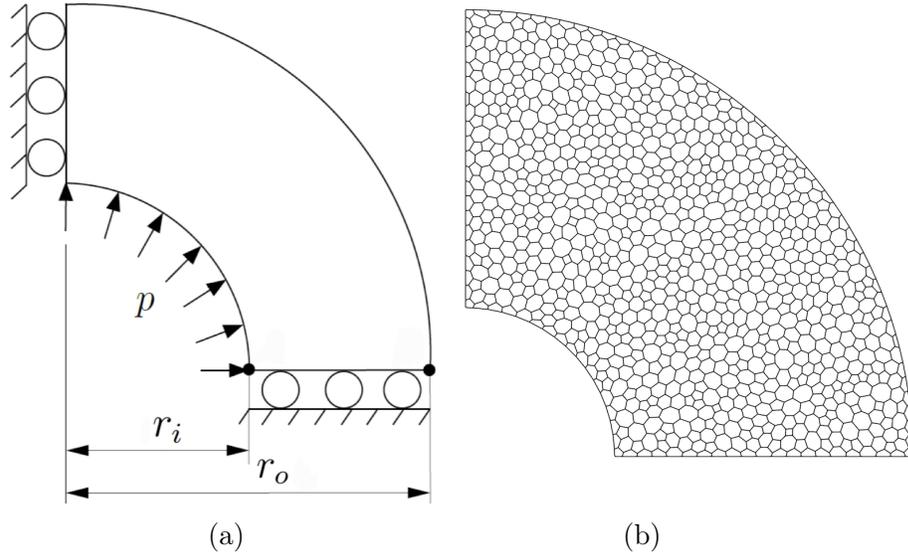


Figura 4.8: Problema cilindro de pared gruesa: (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

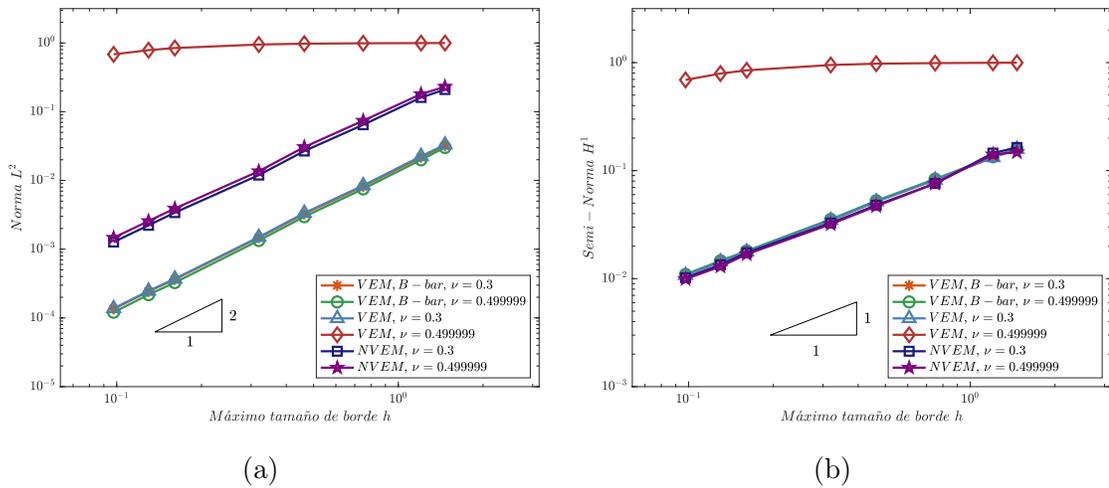


Figura 4.9: Tasas de convergencia para el problema cilindro de pared gruesa: (a) normal  $L^2$  y (b) seminormal  $H^1$ .

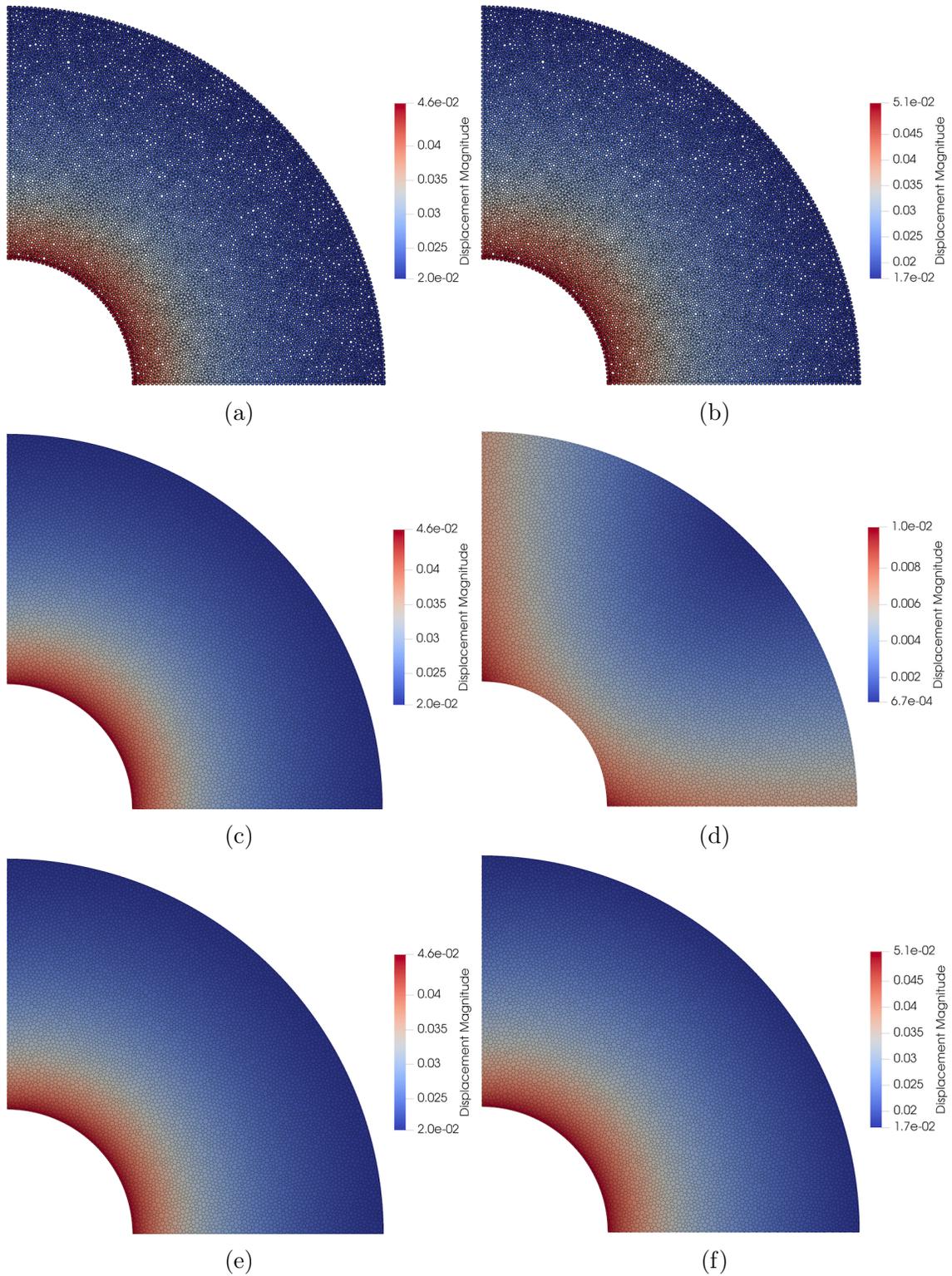


Figura 4.10: Resultados gráficos del problema cilindro de pared gruesa. En (a), (c) y (e) se muestra la magnitud del desplazamientos para los casos compresibles para los esquemas *NVEM*, *VEM*, y *VEM B – bar* respectivamente. En (b), (d) y (f) se muestra la magnitud del desplazamientos para los casos incompresibles de los esquemas *NVEM*, *VEM*, y *VEM B – bar* respectivamente

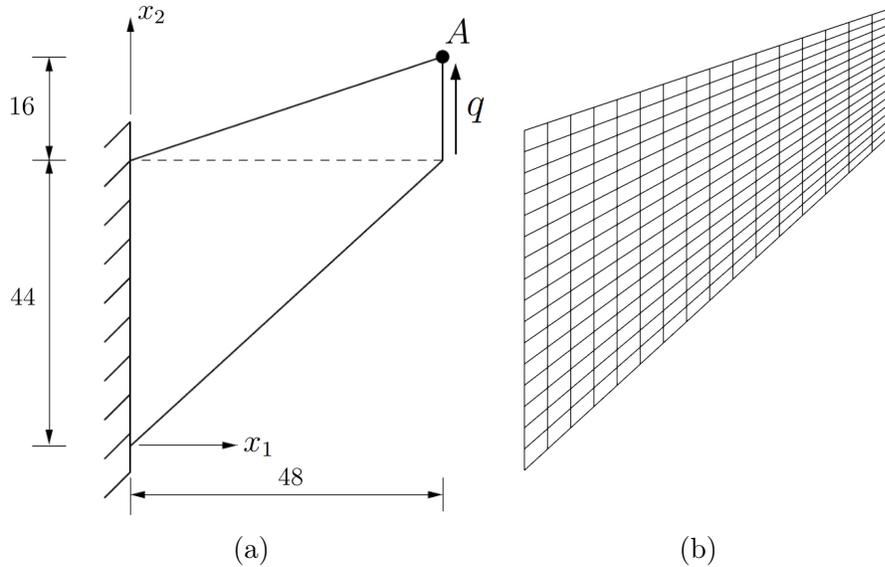


Figura 4.11: Problema membrana de Cook: (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

4.12 muestra un gráfico de la convergencia del punto  $A$  bajo refinamientos sucesivos. Como es de esperar,  $FEM-Q4$  bloquea al igual que  $VEM$ , mientras que  $NVEM$  no bloquea. En la Figura 4.13 se muestra los resultados gráficos del esfuerzo de von Mises y la deformación plástica acumulada. Estos gráficos muestran la subestimación del esfuerzo, y por consiguiente la subestimación de la deformación plástica acumulada.

## 4.2.2. Placa elastoplastica perforada

En este problema se considera un cuarto de una placa perforada sometida a tracción bajo un desplazamiento impuesto. Una malla de ejemplo y las condiciones de borde se muestran en la Figura 4.14. La placa tiene espesor unitario y se asume condición de deformación plana, con  $H = 180$ ,  $V = 100$  y  $r_0 = 50$ . Se aplica un desplazamiento vertical  $\hat{u}_2 = 2 \text{ mm}$  en el borde superior de la placa, y los bordes izquierdo, derecho e inferior se restringen en la dirección normal a estos bordes. El material empleado es elastoplástico bilineal, basado en el criterio de von Mises con plasticidad perfecta, con  $E = 68646.55 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $S_y = 238.301595 \text{ MPa}$ ,  $H = 0 \text{ MPa}$ . En este ejemplo se compara  $NVEM$ ,  $VEM$ , y el ya conocido desempeño de  $FEM Q4$ . Para este estudio, se compara la reacción de la cara superior contra los pasos de pseudo-tiempo, y este gráfico se muestra en la Figura 4.15. Aquí se aprecia que de los esquemas comparados, solo para  $NVEM$  la curva muestra una carga límite en el régimen plástico. En la Figura 4.16 se muestra los resultados gráficos del esfuerzo de von Mises y la deformación plástica acumulada. Estos gráficos muestran el mismo esfuerzo de von Mises para los tres casos, acorde al comportamiento perfectamente plástico, y la subestimación de la deformación plástica acumulada de  $VEM$  y  $FEM-Q4$ .

## 4.2.3. Cilindro de pared gruesa

Este ejemplo consiste, similar al ejemplo de elasticidad lineal, en una representación en deformación plana (con espesor unitario) de un cilindro de pared gruesa sometido a presión

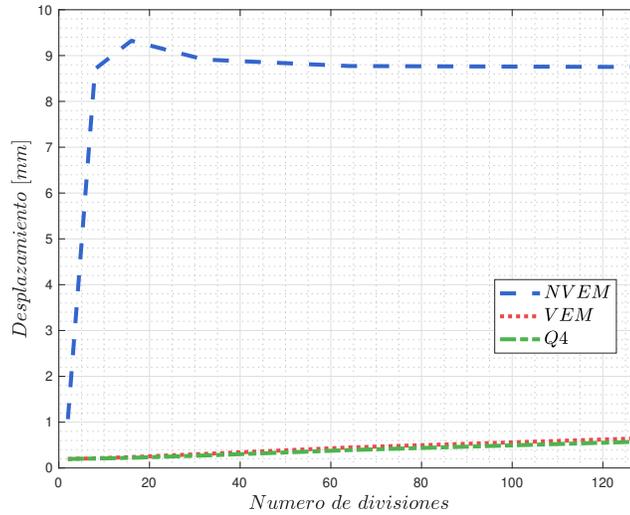


Figura 4.12: Gráfico de convergencia para el problema de la membrana de Cook elastoplástica infinitesimal.

interna. La geometría, las condiciones de contorno y un ejemplo de malla utilizadas en este ensayo numérico son las mismas que se muestran en la Figura 4.8, donde  $p$  es la presión interna,  $r_i$  es el radio interior, y  $r_o$  es el radio exterior. Para este estudio se considera  $r_i = 100 \text{ mm}$ ,  $r_o = 200 \text{ mm}$   $p = 180 \text{ MPa}$ .

El material empleado es elastoplástico bilineal, basado en el criterio de von Mises con plasticidad perfecta, con  $E = 210000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$  (compresible),  $\nu = 0.4999$  (casi-incompresible)  $S_y = 240 \text{ MPa}$ ,  $H = 0 \text{ MPa}$ . En este ejemplo se compara *NVEM*, *VEM*, y el ya conocido desempeño de *FEM Q4*. Para este estudio, se compara los desplazamientos radiales en el punto *A* y *B* contra los pasos de pseudo-tiempo, gráfico que se muestra en la Figura 4.17. Aquí se aprecia que, para el caso compresible, los comportamientos se ajustan bien en los esquemas comparados, mientras que para el caso incompresible, *FEM-Q4* los desplazamientos se subestiman debido al bloqueo volumétrico. En las Figuras 4.18 se muestran los resultados gráficos de la magnitud del desplazamiento para el caso compresible y casi-incompresible, respectivamente.

#### 4.2.4. Prueba de punzón de Prandtl

Este problema consiste en analizar un dominio rectangular simétrico, bajo la compresión de un punzón rígido y rugoso que aplica un desplazamiento vertical sobre parte de la superficie superior del dominio, como se muestra en la Figura 4.19. Se considera deformación plana y un desplazamiento aplicado de  $\hat{u}_2 = -50 \text{ mm}$ . Debido a la simetría, solo se utiliza la mitad del dominio. El material empleado es elastoplástico bilineal, basado en el criterio de von Mises con plasticidad perfecta, con  $E = 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.499$   $S_y = 100 \text{ MPa}$ ,  $H = 0 \text{ MPa}$ . Para este estudio, se compara la reacción de la cara superior contra el desplazamiento impuesto, y este gráfico se muestra en la Figura 4.20. Aquí se aprecia que, de los esquemas comparados solo para *NVEM* la curva muestra una carga límite en el régimen plástico. En la Figura 4.16 se muestran los resultados gráficos del esfuerzo de von Mises y la deformación plástica

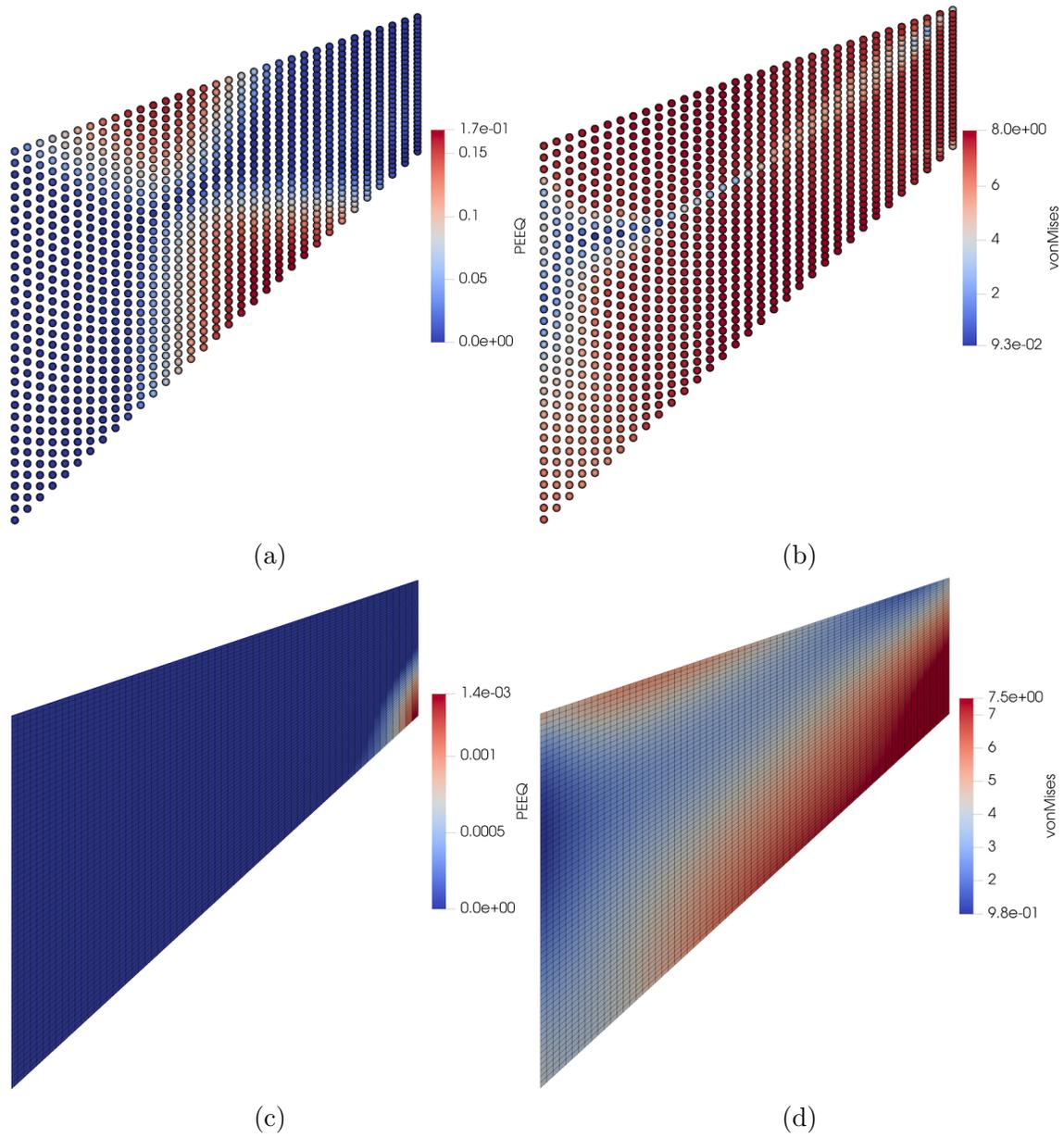


Figura 4.13: Resultados gráficos del problema de la membrana de Cook elastoplástica infinitesimal. En (a), (c) se muestra la deformaci3n plástica acumulada para *NVEM* y *VEM* respectivamente. En (b), (d) se muestra el esfuerzo de von Mises para *NVEM* y *VEM* respectivamente.

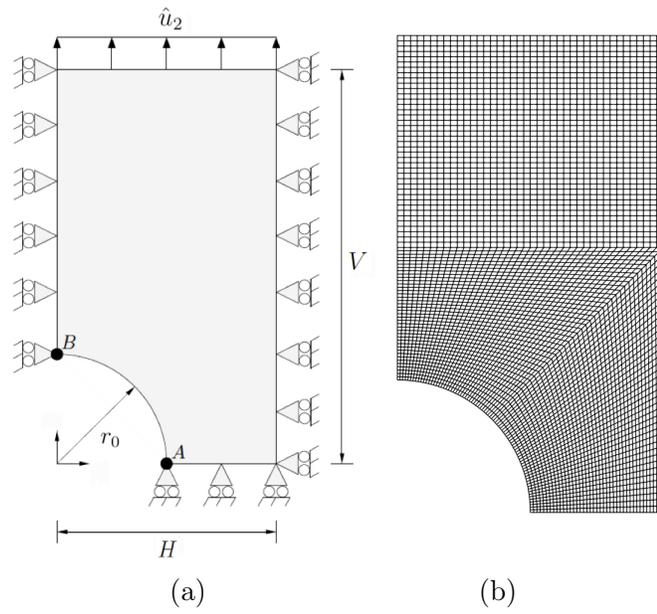


Figura 4.14: Problema Placa elastoplastica perforada: (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

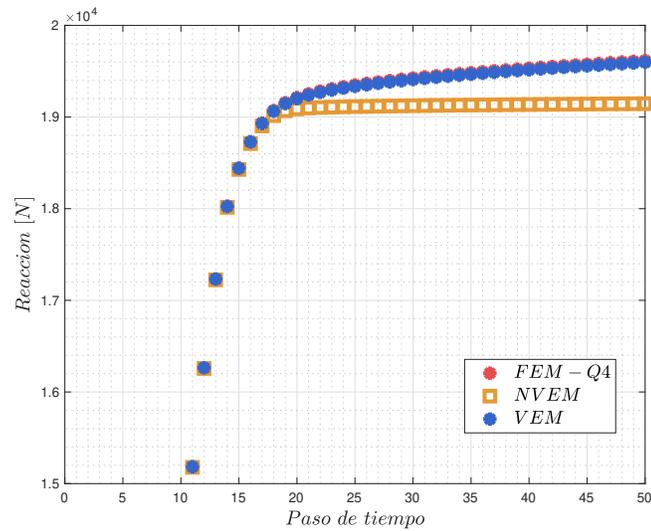


Figura 4.15: Gráficos reacción vs paso de tiempo para el problema de la placa elastoplástica perforada.

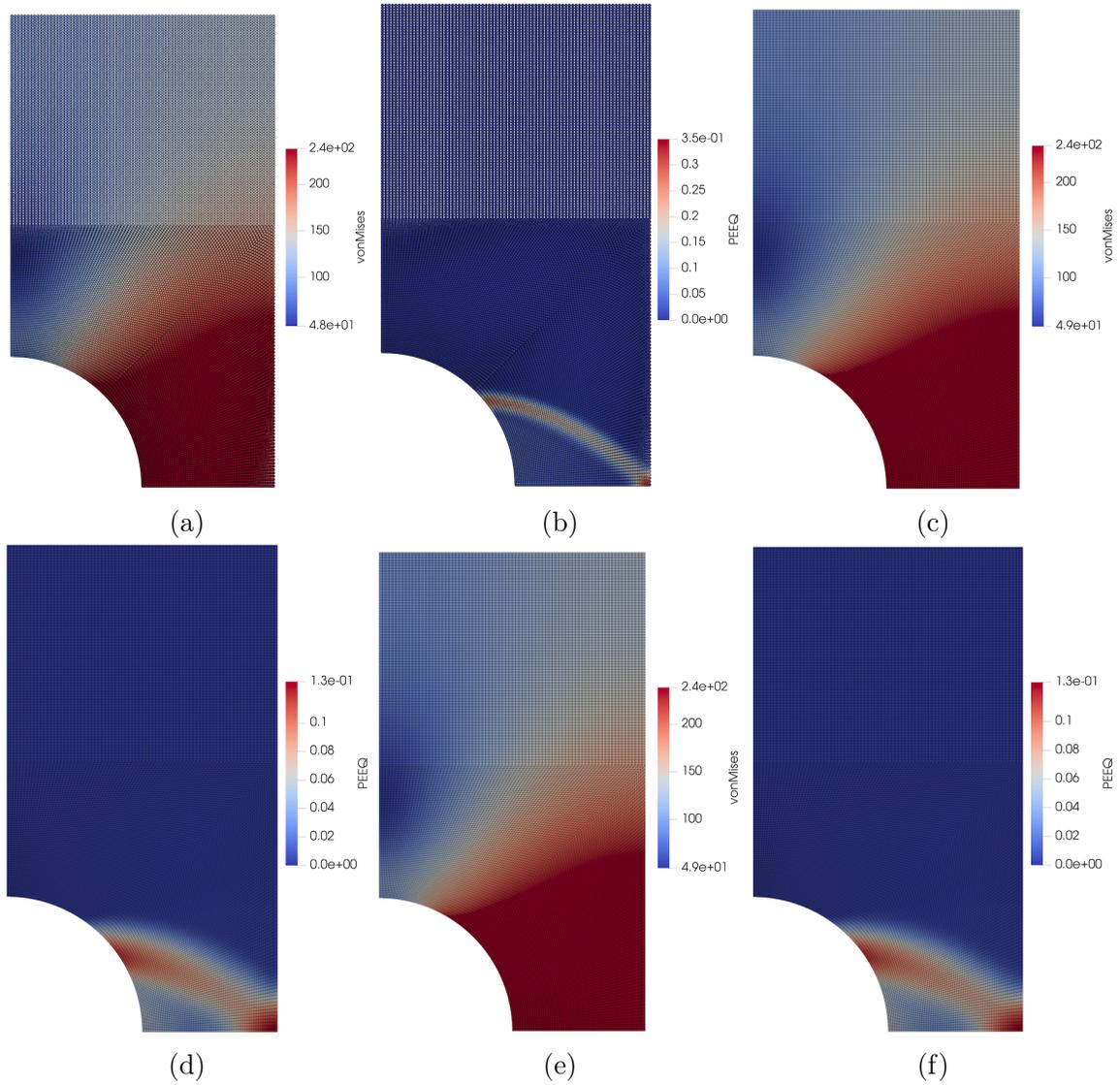


Figura 4.16: Resultados gráficos del problema de la placa elastoplástica perforada. En (a), (c) y (e) se muestra el esfuerzo de von Mises para el caso compresibles para los esquemas *NVEM*, *VEM*, y *FEM-Q4* respectivamente. En (b), (d) y (f) se muestra la deformación plástica acumulada para el caso incompresibles de los esquemas *NVEM*, *VEM*, y *FEM-Q4* respectivamente

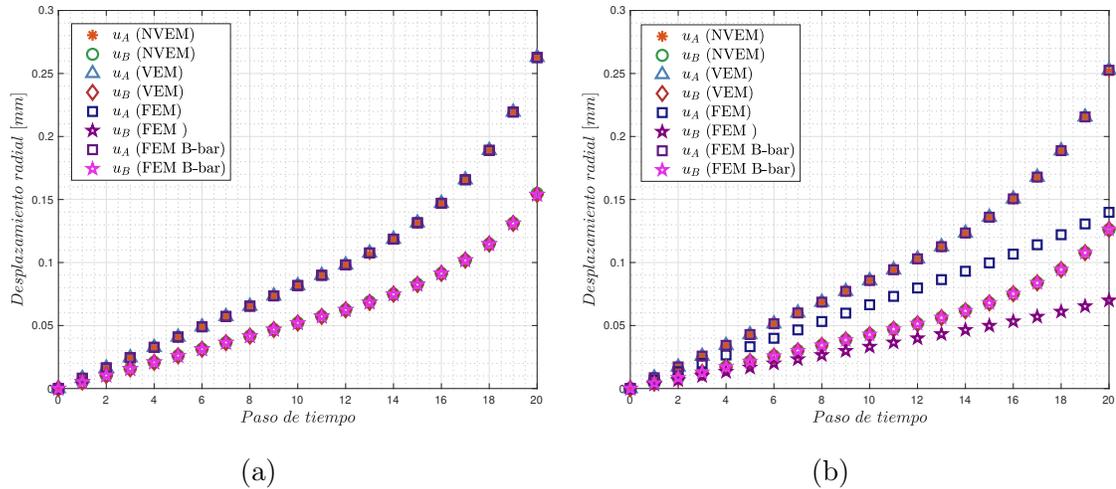


Figura 4.17: Gráficos de convergencia para el problema cilindro de pared gruesa elastoplástico infinitesimal

acumulada.

### 4.3. Hiperelasticidad

#### 4.3.1. Membrana de Cook

Este ejemplo, al igual que en el caso elastoplástico infinitesimal, consiste en una viga empotrada con sección transversal variable y una fuerza cortante en el otro extremo. La geometría, las condiciones de contorno y un ejemplo malla utilizadas en este ejemplo numérico se muestran en la Figura 4.11, donde  $q = 4.0 \text{ N/mm}$  es la fuerza externa. Se asume espesor unitario y condición de deformación plana. El material empleado es Neo-Hookean casi incompresible, con  $E = 2000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.499995$ . En este ejemplo se compara *NVEM*, *VEM* con dos estabilizaciones. Para este estudio, se compara el desplazamiento vertical del extremo superior derecho de la viga, en el punto *A* según la Figura 4.11(a) respecto al incremento de divisiones en los bordes del dominio. La Figura 4.23 muestra un gráfico de la convergencia del punto *A* bajo refinamientos sucesivos. Como es de esperar, *FEM-Q4* sufre de bloqueo volumétrico, mientras que los demás esquemas no bloquean. Por otro lado, *VEM* con la estabilización de Chi converge más rápido que *NVEM* y la otra estabilización. En la Figura 4.24 se muestra los resultados gráficos de la magnitud del desplazamiento.

#### 4.3.2. Compresión plana bajo desplazamiento

Este ejemplo es utilizado para comprobar la capacidad de los métodos numéricos para soportar grandes deformaciones. Consiste en un dominio cuadrado de  $1 \times 1$  que es sometido a compresión bajo el desplazamiento de dos placas paralelas perfectamente rígidas, una unida a la parte superior del dominio, y la otra a la parte inferior. Debido a la simetría del problema, se utiliza solo un cuarto del dominio, según se muestra en la Figura 4.25(a) junto con las condiciones de borde. Se aplica un desplazamiento para alcanzar una deformación vertical del 45 %. La malla utilizada se muestra en la Figura 4.25(b). Se asume espesor unitario y

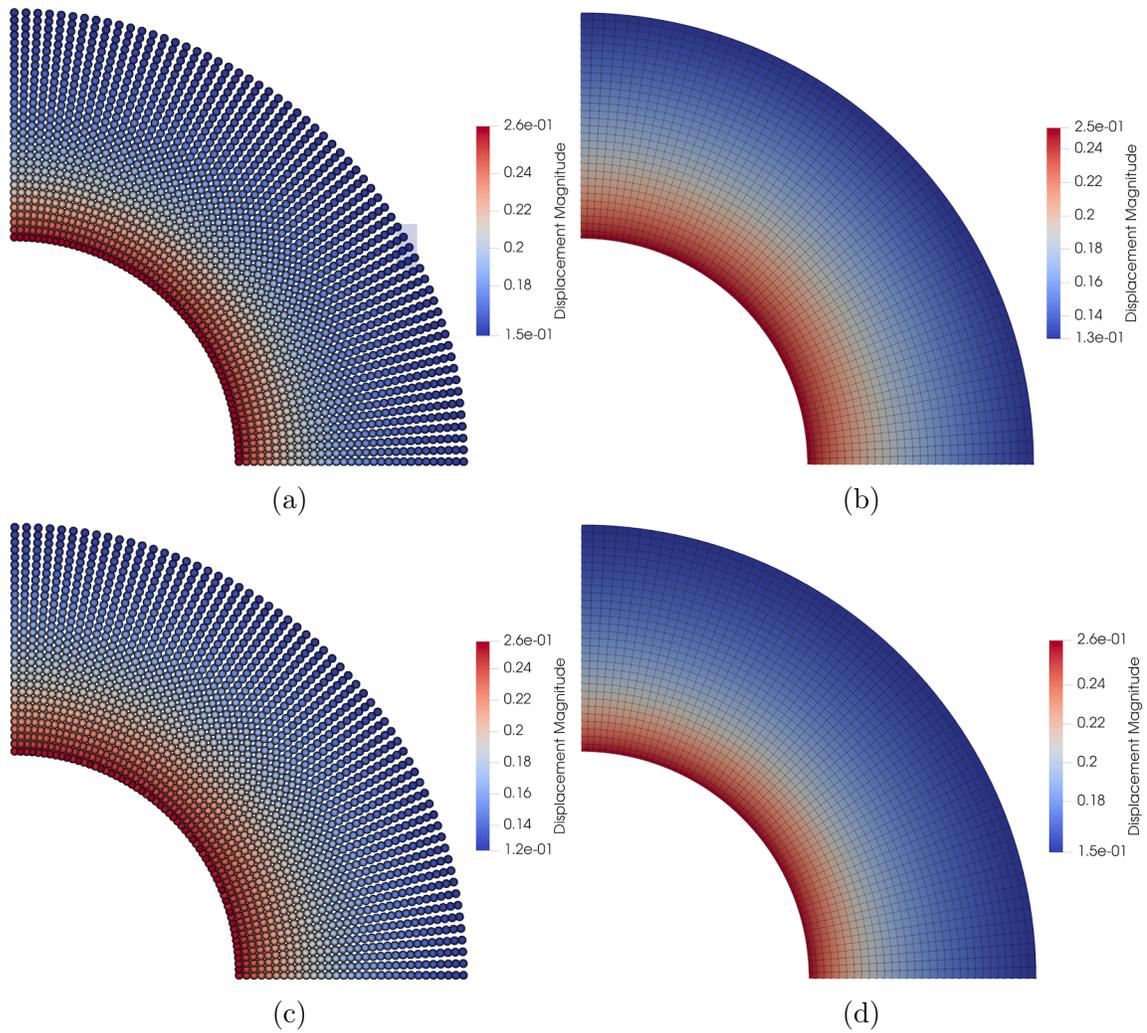


Figura 4.18: Resultados gráficos del problema cilindro de pared gruesa elastoplástico infinitesimal. En (a), (c) se muestra la magnitud del desplazamientos para los casos compresibles para los esquemas *NVEM*, *VEM*, respectivamente. En (b), (d) se muestra la magnitud del desplazamientos para los casos incompresibles de los esquemas *NVEM*, *VEM* respectivamente

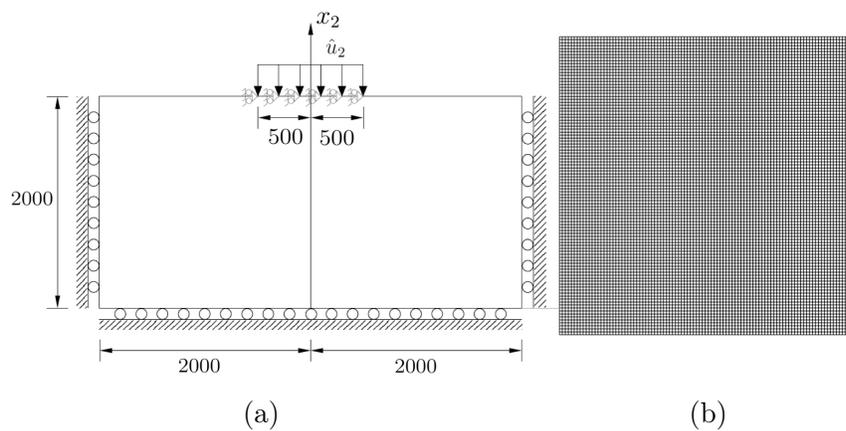


Figura 4.19: Prueba de punzón de Prandtl: (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

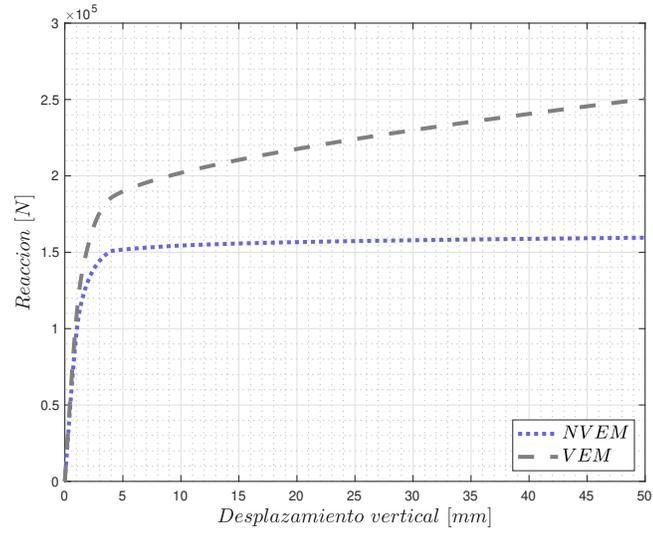


Figura 4.20: Convergencia para el problema Prueba de punzón de Prandtl.

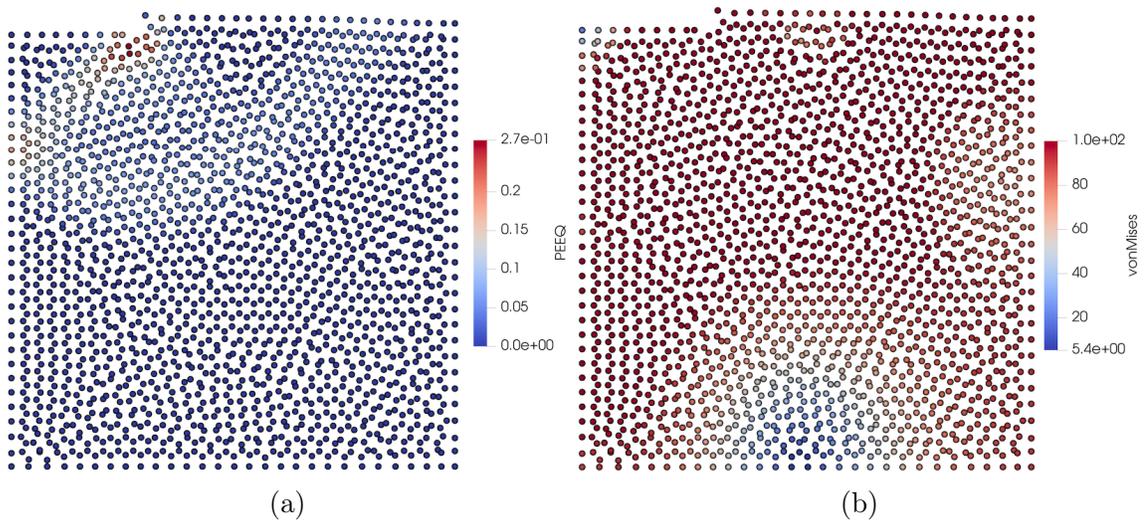


Figura 4.21: Resultados gráficos prueba de punzón de Prandtl. En (a) deformación plástica acumulada de NVEM, (b) esfuerzo de von Mises de NVEM.

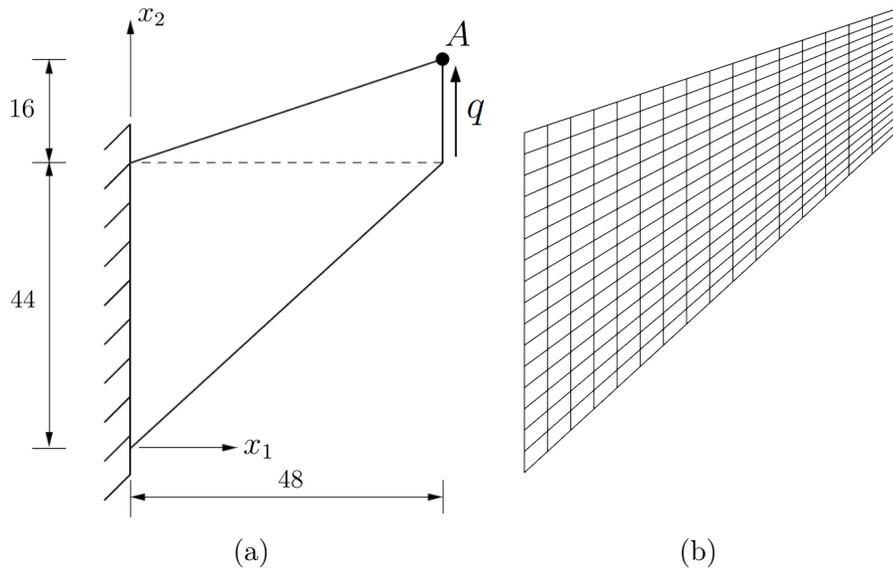


Figura 4.22: Problema de la membrana de Cook hiperelástica: (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

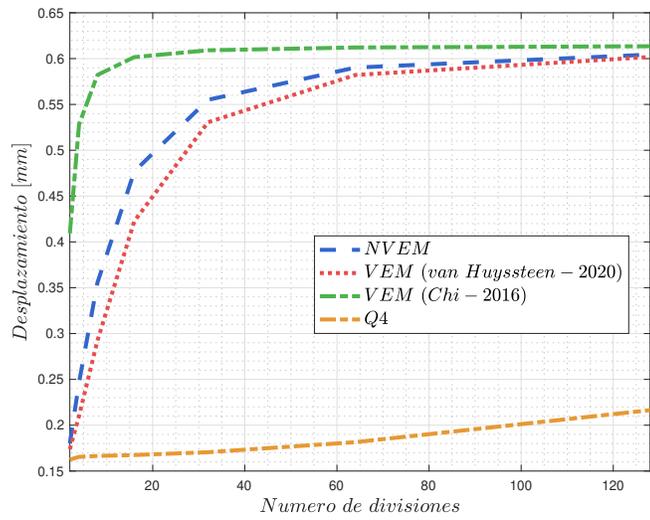


Figura 4.23: Gráfico de convergencia para de la membrana de Cook hiperelástica.

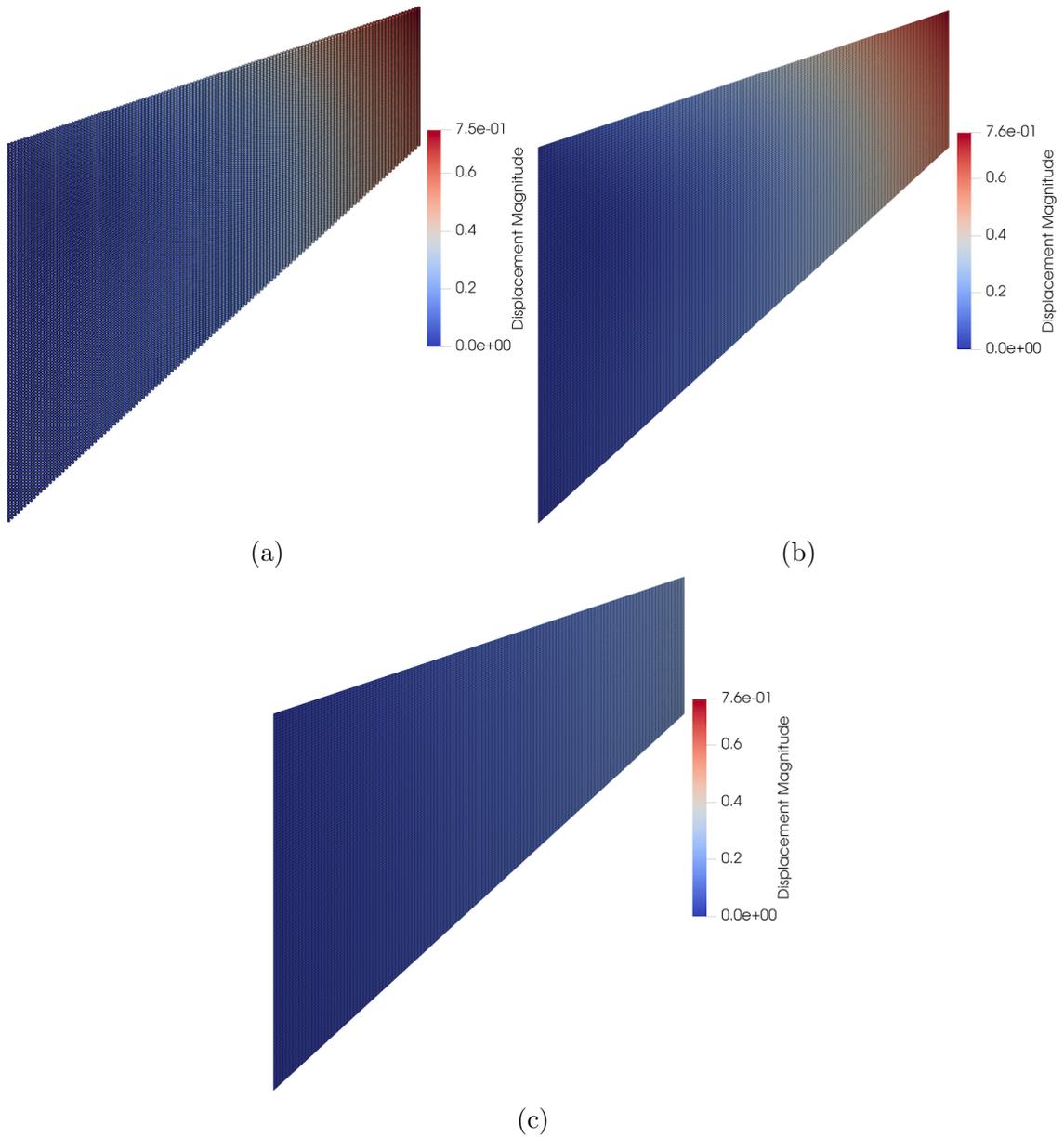


Figura 4.24: Resultados gráficos del problema cilindro de pared gruesa. En (a), (c) y (e) se muestra la magnitud del desplazamientos para los casos compresibles para los esquemas *NVEM*, *VEM*, y *VEM B – bar* respectivamente. En (b), (d) y (f) se muestra la magntitud del desplazamientos para los casos incompresibles de los esquemas *NVEM*, *VEM*, y *VEM B – bar* respectivamente

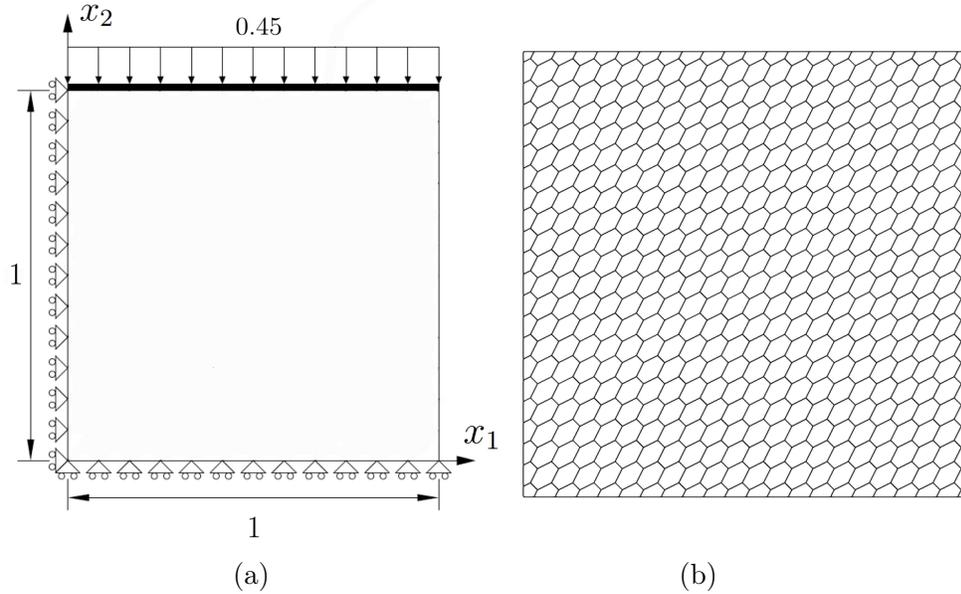


Figura 4.25: Problema de compresión plana bajo desplazamiento: (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

condición de deformación plana. El material empleado es Neo-Hookean casi incompresible, con  $\kappa = 400889.806 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 80.194 \text{ MPa}$ . En este ejemplo se compara *NVEM*, *VEM* con dos estabilizaciones [52, 58]. En la Figura 4.26 se aprecia el buen desempeño de *NVEM* y *VEM1* [52] bajo la deformación extrema, mientras que *VEM2* [58] no es capaz de completar la simulación.

### 4.3.3. Compresión plana bajo presión

Este problema consiste en un dominio rectangular  $10 \times 20$  utilizado como prueba para comprobar la capacidad de una formulación numérica para describir grandes deformaciones en materiales casi-incompresibles cuando están sometidos a una carga de presión independiente de la deformación. La geometría del problema y sus condiciones de borde se muestran en la Figura 4.27(a). Debido a la simetría del problema, se utiliza solo la mitad del dominio, según se muestra en la malla de ejemplo de la Figura 4.27(b) junto con  $q = -800 \text{ MPa}$ . El material empleado es Neo-Hookean casi incompresible, con  $\kappa = 400889.806 \text{ MPa}$  y  $\mu = 80.194 \text{ MPa}$ . En este ejemplo se compara *NVEM*, *VEM* con dos estabilizaciones. En la Figura 4.28 se aprecia el buen desempeño de *NVEM* y *VEM1* para describir la deformación bajo la presión impuesta, mientras que *VEM2* muestra inestabilidades y subestima el desplazamiento por el bloqueo volumétrico.

### 4.3.4. Indentación sin fricción de un bloque

Este problema consiste en un dominio rectangular  $2 \times 1$  bajo indentación sin fricción bajo la condición de deformación plana. Este problema prueba la capacidad del esquema numérico para deformarse bajo compresión en un dominio altamente restringido. En el problema, los desplazamientos normales de las superficies laterales e inferior están restringidos, permitiendo el deslizamiento paralelo a las caras, mientras que en la mitad cara superior se aplica un des-

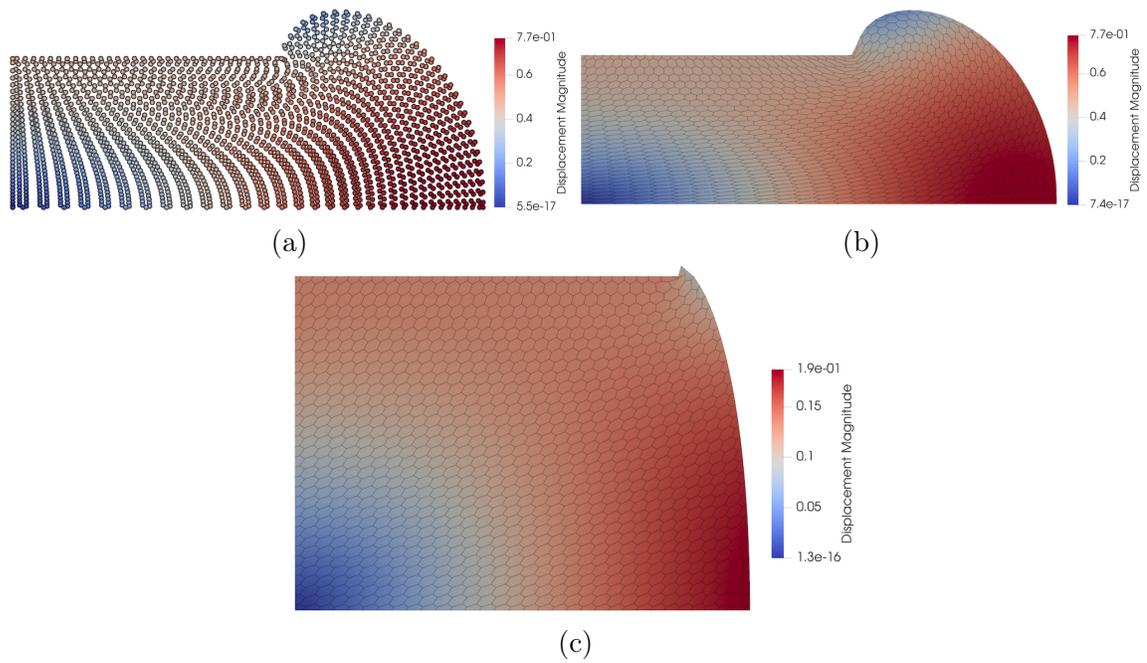


Figura 4.26: Resultados gráficos del problema de compresión plana bajo desplazamiento. Magnitud de desplazamientos de (a) *NVEM*, (b) *VEM1*, (c) *VEM2*.

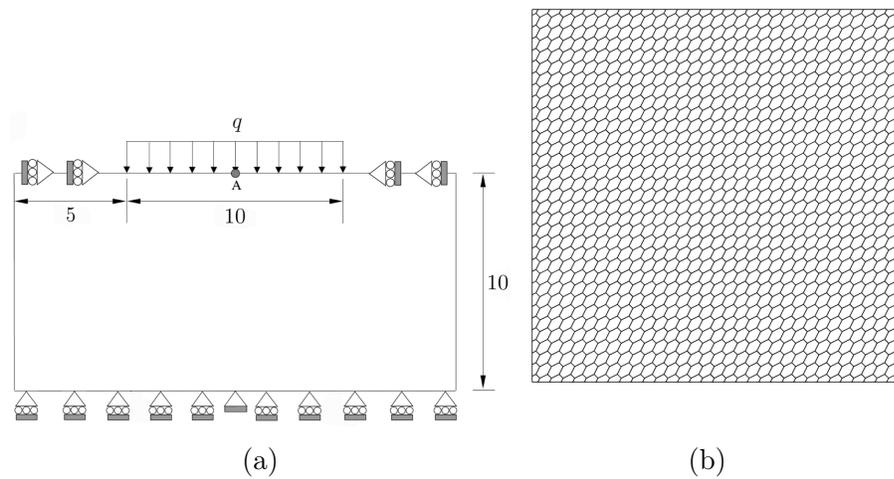


Figura 4.27: Problema de compresión plana bajo presión: (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

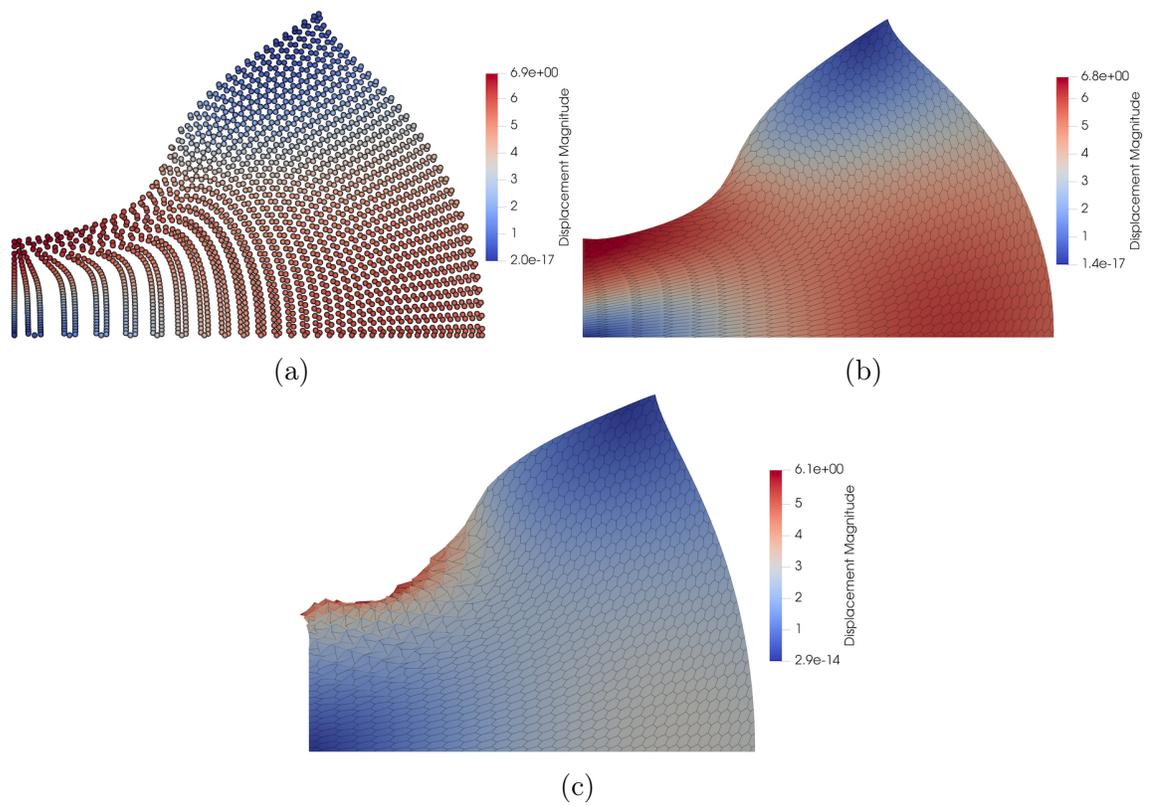


Figura 4.28: Resultados gráficos del problema de compresi3n plana bajo presi3n. En (a), (b) y (c) se muestra la magnitud del desplazamientos para los esquemas *NVEM*, *VEM*, y *VEM2* respectivamente.

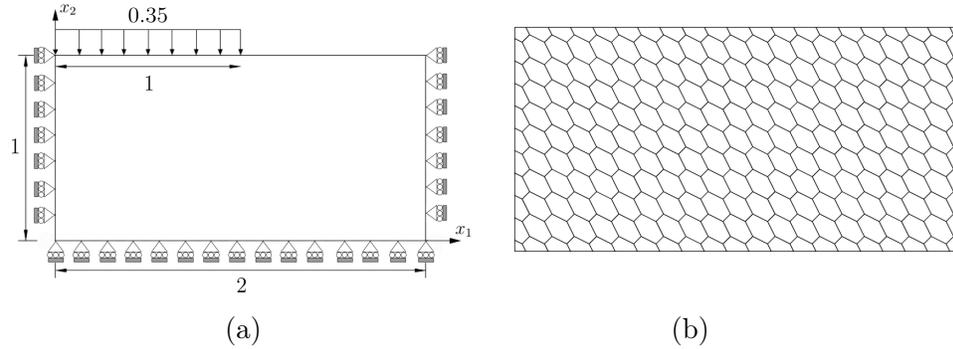


Figura 4.29: Problema de indentación sin fricción de un bloque: (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

plazamiento para comprimir la cara como se muestra en la Figura 4.29(a). El desplazamiento aplicado es de  $0.35 \text{ mm}$  y la malla utilizada se muestra en la Figura 4.29(b). El material empleado es Neo-Hookean casi incompresible, con  $\kappa = 400889.806 \text{ MPa}$  y  $\mu = 80.194 \text{ MPa}$ . En este ejemplo se compara *NVEM*, *VEM* con dos estabilizaciones. En la Figura 4.30 se aprecia que *NVEM* y *VEM1* describen la misma forma deformada bajo el desplazamiento impuesto, mientras que *VEM2* muestra inestabilidad numérica.

#### 4.3.5. Columna bajo oscilación libre

Este ejemplo consiste en una columna de dimensiones  $1 \times 6 \text{ m}$  empotrada en su parte inferior y sometida a una velocidad inicial permitiendo que oscile libremente. Se utiliza este ejemplo para revisar la capacidad de conservar la energía de los esquemas numéricos. El material empleado es Neo-Hookean compresible, con  $\mu = 0.4225 \text{ MPa}$ ,  $\lambda = 10 \text{ MPa}$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ . Se utiliza el algoritmo de integración temporal de Newmark sin amortiguamiento, con un paso de tiempo de  $\Delta t = 0.125 \text{ s}$  y un tiempo total de 200 segundos. La velocidad inicial impuesta se aplica en función de la altura, donde  $\hat{v}_2 = 0.0333X_2$ . Se considera espesor unitario y deformación plana. En la Figura 4.31 se muestra dos mallas de ejemplo. Las mallas se construyeron con base en mallas de triángulos, donde se subdividieron los bordes del dominio de forma regular, recombinando los triángulos para formar mallas *Q4*, y utilizando sus centroides como vértices de polígonos para construir mallas de más de tres lados (*Poly*).

En la Figura 4.32(a) se muestran la magnitud del desplazamiento de la esquina superior derecha de la columna para el esquema *VEM* y *NVEM1* para diferentes mallas, mostrando que ambos esquemas convergen a la misma respuesta oscilatoria. En la Figura 4.32(b) se muestra la evolución de la energía total para las diferentes mallas, mostrando que los esquemas requieren mallas finas para alcanzar la conservación de energía. En la Figura 4.33 se muestra la evolución de las energías para los esquemas *NVEM* y *VEM1* para la malla *Q4*  $40 \times 200$ .

#### 4.3.6. Impacto de una esfera elástica

Este ejemplo consiste en el impacto de una esfera elástica sobre una superficie del mismo material. La esfera es un  $1 \text{ in}$  de diámetro (cuerpo 1 o cuerpo objeto) y cilindro donde impacta (cuerpo 2 o cuerpo de contacto) tiene un diámetro de  $2 \text{ in}$  y una altura de  $4 \text{ in}$ . Por la simetría del problema se utiliza la aproximación de simetría en el eje. El material empleado

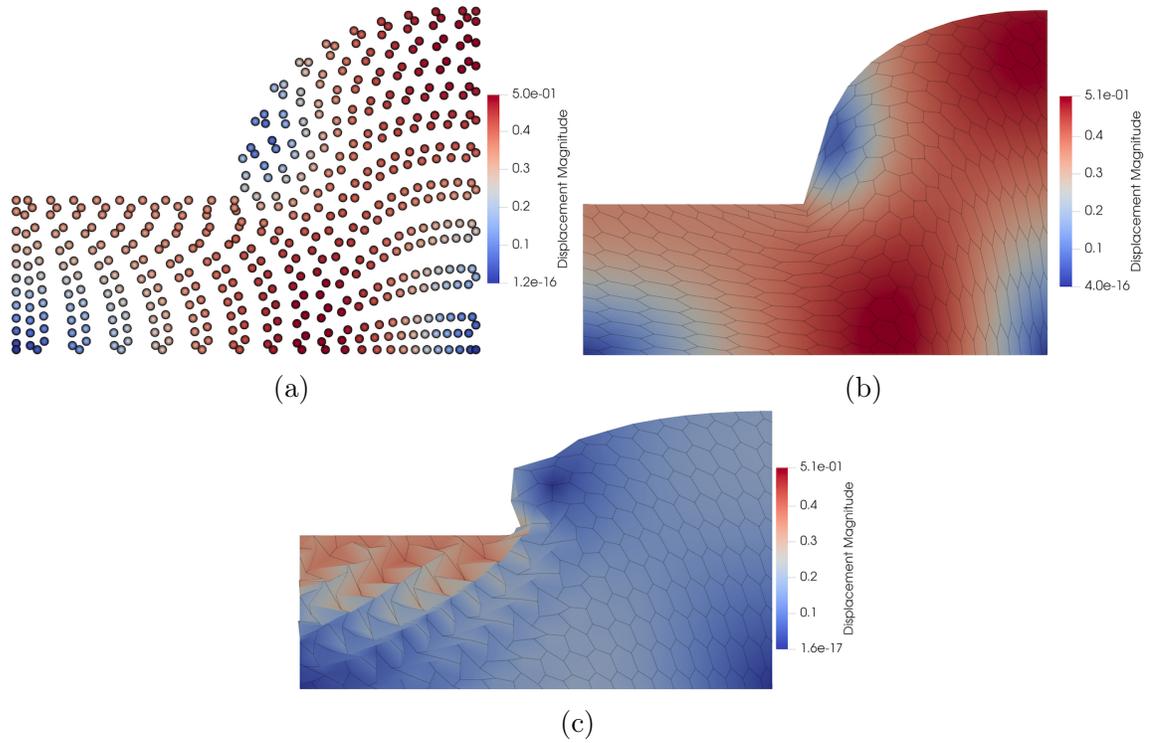


Figura 4.30: Resultados gráficos del problema de indentación sin fricción de un bloque. En (a), (b) y (c) se muestra la magnitud del desplazamientos para los esquemas *NVEM*, *VEM*, y *VEM2* respectivamente.

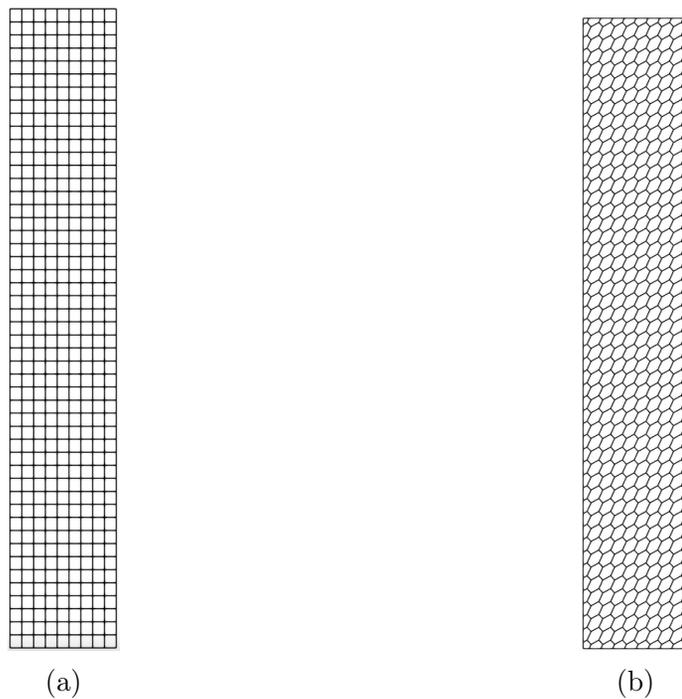
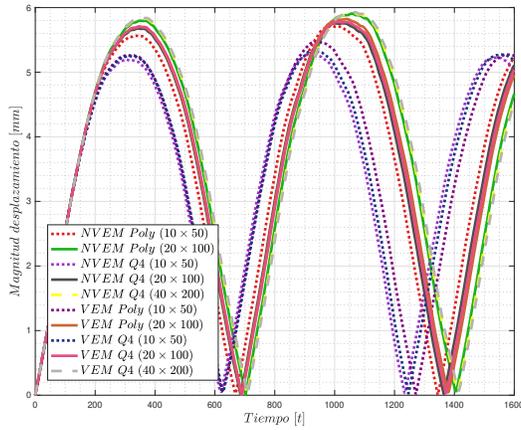
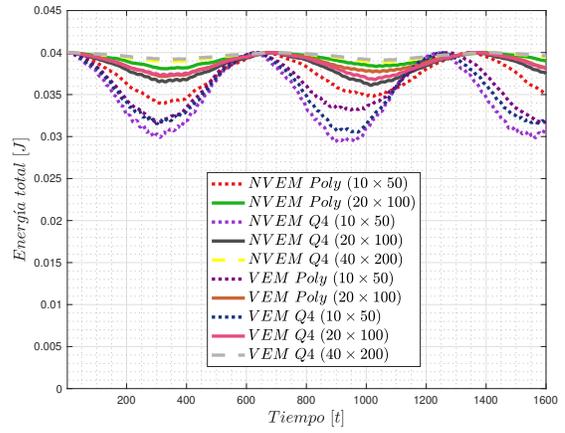


Figura 4.31: Problema de columna bajo oscilación libre. (a) Malla de ejemplo *Q4*, y (b) malla de ejemplo de polígonos.

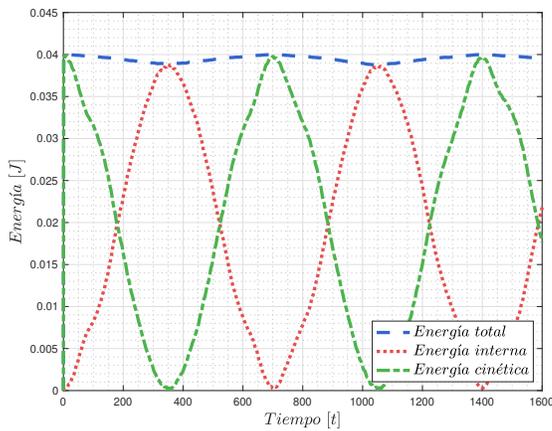


(a)

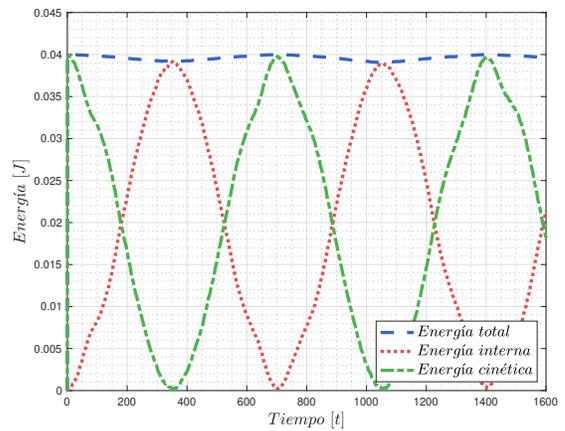


(b)

Figura 4.32: (a) Magnitud del desplazamiento del punto ubicado en el extremo superior derecho de la columna para diferentes mallas y (b) la evolución de la energía total.



(a)



(b)

Figura 4.33: Evolución de las energías para (a) NVEM, (b) y VEM.

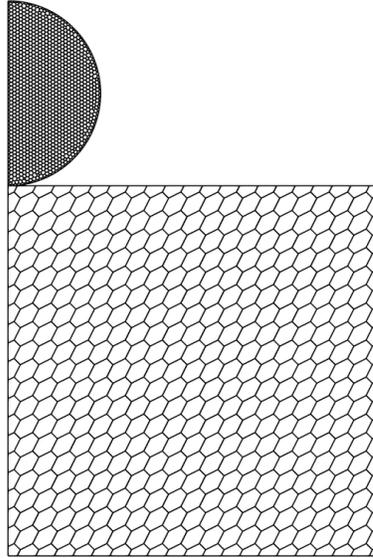


Figura 4.34: Malla utilizada en el problema de impacto de una esfera elástica.

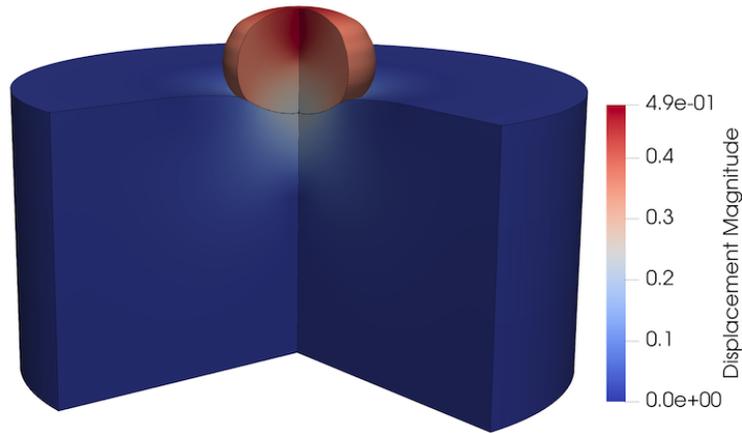


Figura 4.35: Magnitud del desplazamiento para el problema de impacto de una esfera elástica.

es Neo-Hookean casi-incompresible, con  $E = 100 \text{ psi}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ . Se utiliza el algoritmo de Newmark con contacto penalizado, con un paso de tiempo de  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$  y un tiempo total de 1000 segundos. La velocidad inicial impuesta es de  $\hat{v}_2 = -5 \text{ in/s}$ . La malla utilizada se muestra en la Figura 4.34. En la Figura 4.35 se muestra la esfera al impactar a los 1000 segundo de simulación, donde se aprecia el buen comportamiento de los cuerpos impactados, sin rastros de modos espurios.

## 4.4. Elastoplasticidad finita

### 4.4.1. Membrana de Cook

Este ejemplo, al igual que en el caso elastoplástico infinitesimal, consiste en una viga empotrada con sección transversal variable y una fuerza cortante en el otro extremo. La geometría, las condiciones de contorno y un ejemplo malla utilizadas en este ejemplo numérico se muestran en la Figura 4.11, donde  $q = 4.0 \text{ N/mm}$  es la fuerza externa. Se supone espesor unitario

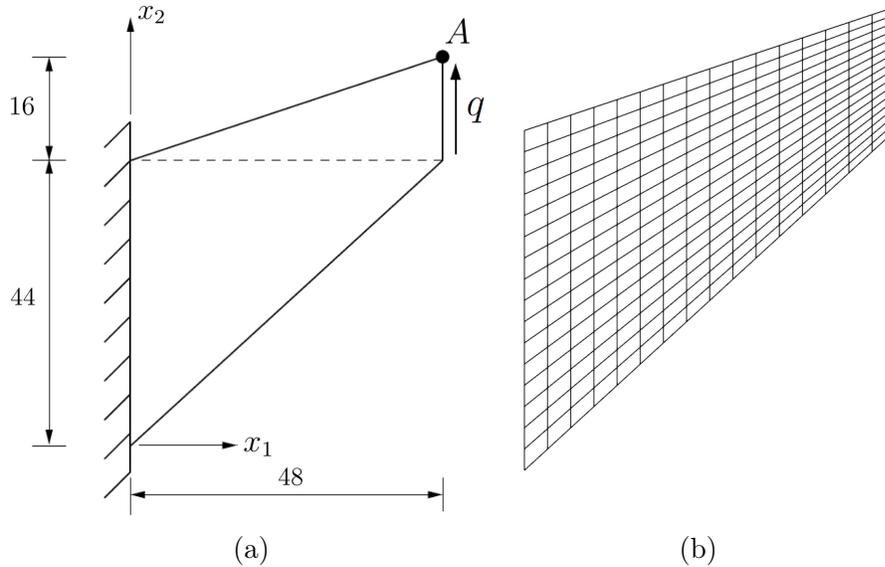


Figura 4.36: Problema de membrana de Cook para plasticidad finita (mismo esquema que casos anteriores): (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

y condición de deformación plana. El material empleado es Neo-Hookean casi-incompresible en la parte elástica, y en el régimen plástico se utiliza el modelo basado en el criterio de von Mises, con endurecimiento isotrópico lineal, con  $E = 200 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $S_y = 5 \text{ MPa}$ ,  $H = 20 \text{ MPa}$ . En este ejemplo se compara  $NVEM$ ,  $VEM$  con dos estabilizaciones.

Para este estudio, se compara el desplazamiento vertical del extremo superior derecho de la viga, en el punto  $A$  según la Figura 4.36(a) respecto al incremento de divisiones de la malla. La Figura 4.37 muestra un gráfico de la convergencia del punto  $A$  bajo refinamientos sucesivos. Similar al caso hiperelástico,  $VEM2$  converge más rápido que  $NVEM$  y  $VEM1$ . En la Figura 4.38 se muestra los resultados gráficos del esfuerzo de von Mises y la deformación plástica acumulada en el último paso de pseudotiempo, en donde se aprecia que el comportamiento en los esquemas  $NVEM$  y  $VEM1$  son similares, mientras que en  $VEM2$ , debido a distorsión de la malla en el extremo superior izquierdo, se concentra el esfuerzo generando una deformación plástica acumulada más elevada.

#### 4.4.2. Indentación sin fricción de un bloque

Este problema, al igual en el problema hiperelástico, consiste en un dominio rectangular  $2 \times 1$  bajo indentación sin fricción bajo la condición de deformación plana. Este problema prueba la capacidad del esquema numérico para deformarse bajo compresión en un dominio altamente restringido. En el problema, los desplazamientos normales de las superficies laterales e inferior están restringidas, permitiendo el deslizamiento paralelo a las caras, mientras que en la mitad cara superior se aplica un desplazamiento para comprimir la cara como se muestra en la Figura 4.29(a). El desplazamiento aplicado es de  $0.35 \text{ mm}$  y la malla utilizada se muestra en la Figura 4.29(b). Se asume espesor unitario y condición de deformación plana. El material empleado es Neo-Hookean casi-incompresible en la parte elástica, y en el régimen plástico el modelo es basado en el criterio de von Mises, con endurecimiento isotrópico lineal, con

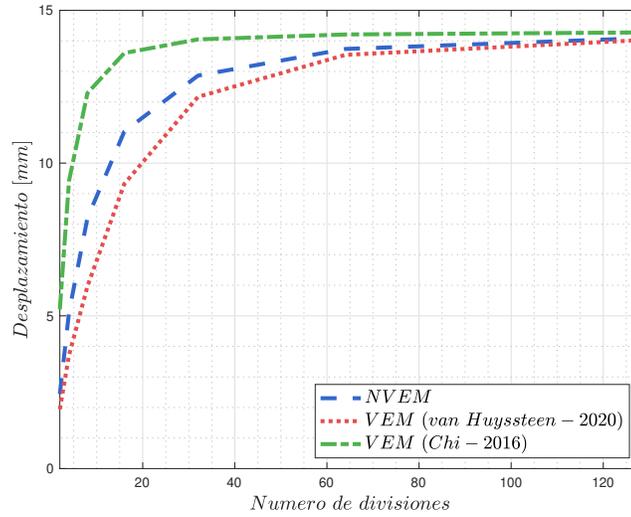


Figura 4.37: Gráfico de convergencia del problema de la membrana de Cook para plasticidad finita. En la gráfica se compara los esquemas *NVEM*, *VEM1*, y *VEM2*

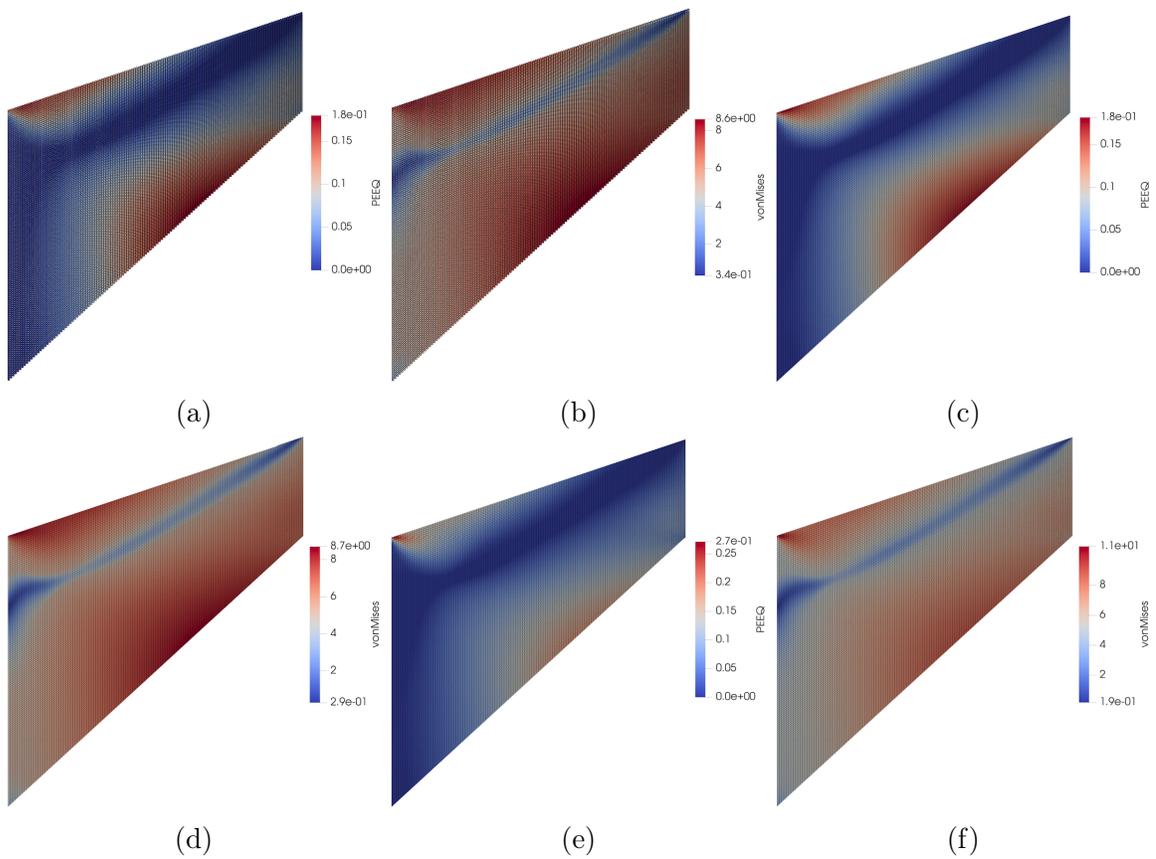


Figura 4.38: Resultados gráficos del problema de la membrana de Cook para plasticidad finita. En (a), (c) y (e) se muestra la deformación plástica acumulada para los esquemas *NVEM*, *VEM1*, y *VEM2* respectivamente. En (b), (d) y (f) se muestra el esfuerzo de von Mises para los esquemas *NVEM*, *VEM1*, y *VEM2* respectivamente.

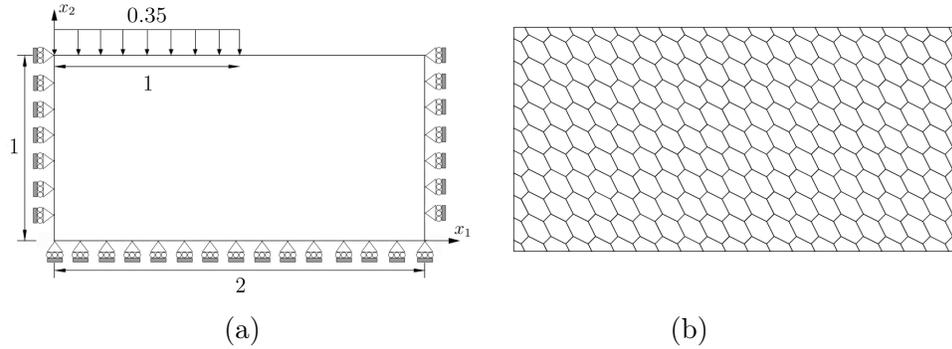


Figura 4.39: Problema de indentación sin fricción de un bloque para elastoplasticidad finita (mismo esquema que caso hiperelástico): (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

$\kappa = 400889.806 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 80.194 \text{ MPa}$ ,  $S_y = 5 \text{ MPa}$  y  $H = 20 \text{ MPa}$ .

En este ejemplo se compara *NVEM*, *VEM* con dos estabilizaciones. En la Figura 4.40 se aprecia que *NVEM* y *VEM1* describen la misma forma deformada bajo el desplazamiento impuesto, mientras que *VEM2* muestra inestabilidades numéricas. Por otro lado, tanto el esfuerzo de von Mises como la deformación plástica acumulada son similares para los esquemas *NVEM* y *VEM1*, mientras que estos valores son superiores para *VEM2* debido a la distorsión generada por la inestabilidad.

#### 4.4.3. Compresión plana bajo desplazamiento

Este ejemplo, al igual que para el caso hiperelástico, es utilizado para comprobar la capacidad de los métodos numéricos para soportar grandes deformaciones. Consiste en un dominio cuadrado de  $1 \times 1$  que es sometido a compresión bajo el desplazamiento de dos placas paralelas perfectamente rígidas, una unida a la parte superior del dominio, y la otra a la parte inferior. Debido a la simetría del problema, se utiliza solo un cuarto del dominio, según se muestra en la Figura 4.41(a) junto con las condiciones de borde. Se aplica un desplazamiento para alcanzar una deformación vertical del 45 %. La malla utilizada se muestra en la Figura 4.41(b). Se asume espesor unitario y condición de deformación plana. El material empleado es Neo-Hookean casi-incompresible en la parte elástica, y en el régimen plástico el modelo es basado en el criterio de von Mises, con endurecimiento isotrópico lineal, con  $\kappa = 400889.806 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 80.194 \text{ MPa}$ ,  $S_y = 5 \text{ MPa}$  y  $H = 20 \text{ MPa}$ . En este ejemplo se compara *NVEM*, *VEM* con dos estabilizaciones. En la Figura 4.42 se aprecia el buen desempeño de *NVEM* y *VEM1* bajo la deformación extrema, mientras que *VEM2* muestra inestabilidades numéricas. Por otro lado, tanto el esfuerzo de von Mises como la deformación plástica acumulada son similares para los esquemas *NVEM* y *VEM1*, mientras que estos valores son superiores para *VEM2* debido a la distorsión generada por la inestabilidad.

#### 4.4.4. Contacto entre dos bloques

Este ejemplo consiste el contacto de dos bloques de dimensiones  $2 \times 1$  (cuerpo 1 o cuerpo objeto) y  $4 \times 2$  (cuerpo 2 o cuerpo de contacto) bajo la acción de un desplazamiento vertical en la parte superior del primer bloque en una representación de deformación plana con espesor unitario. Se utiliza este ejemplo para comprobar el desempeño del esquema *NVEM*

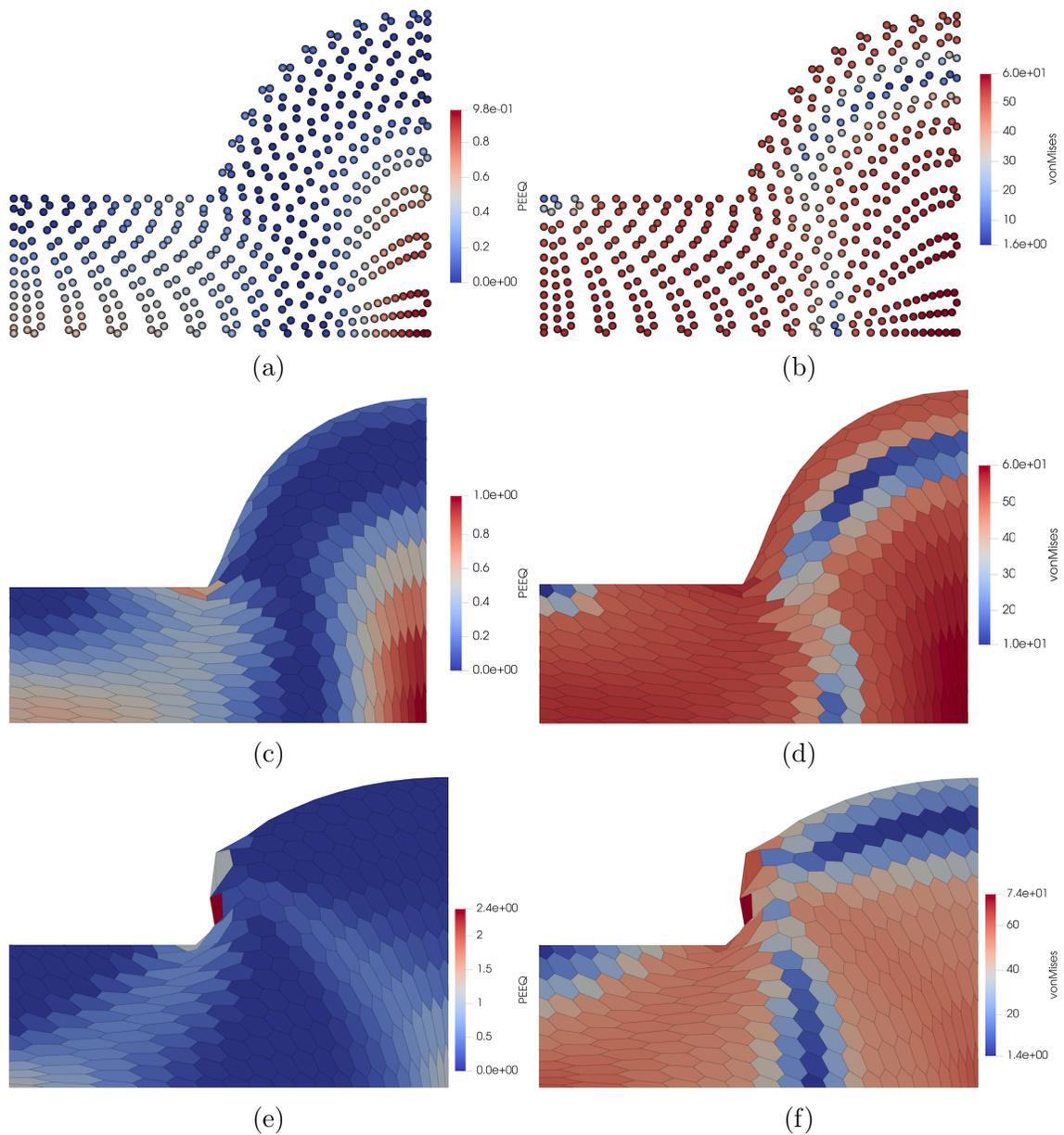


Figura 4.40: Resultados gráficos del problema de indentación sin fricción de un bloque para elastoplasticidad finita (mismo que caso hiperelástico). En (a), (c) y (e) se muestra la deformación plástica acumulada para los esquemas *NVEM*, *VEM1*, y *VEM2* respectivamente. En (b), (d) y (f) se muestra el esfuerzo de von Mises para los esquemas *NVEM*, *VEM1*, y *VEM2* respectivamente.

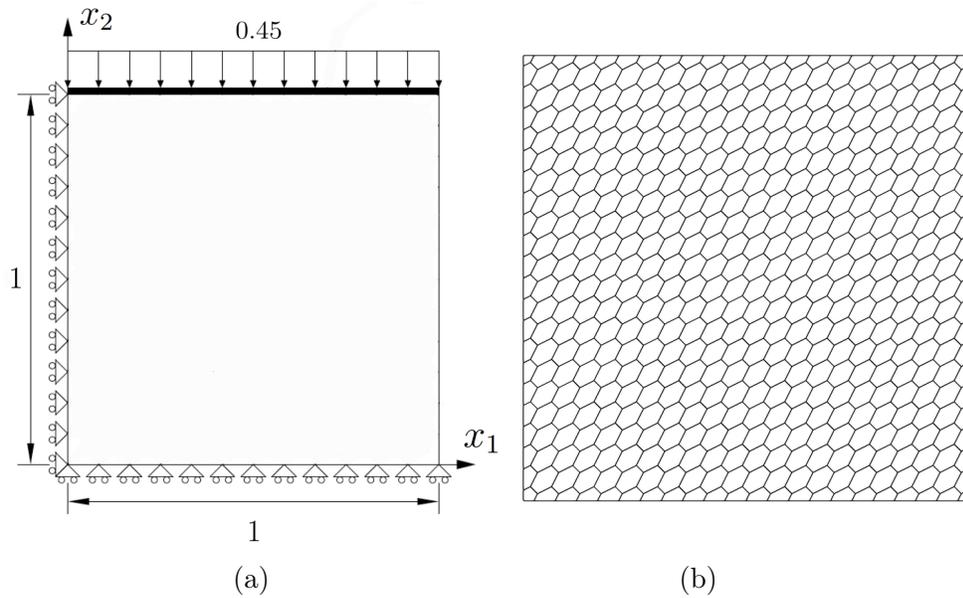


Figura 4.41: Compresión plana bajo desplazamiento (mismo que caso hiperelástico): (a) diagrama del problema y (b) malla de ejemplo.

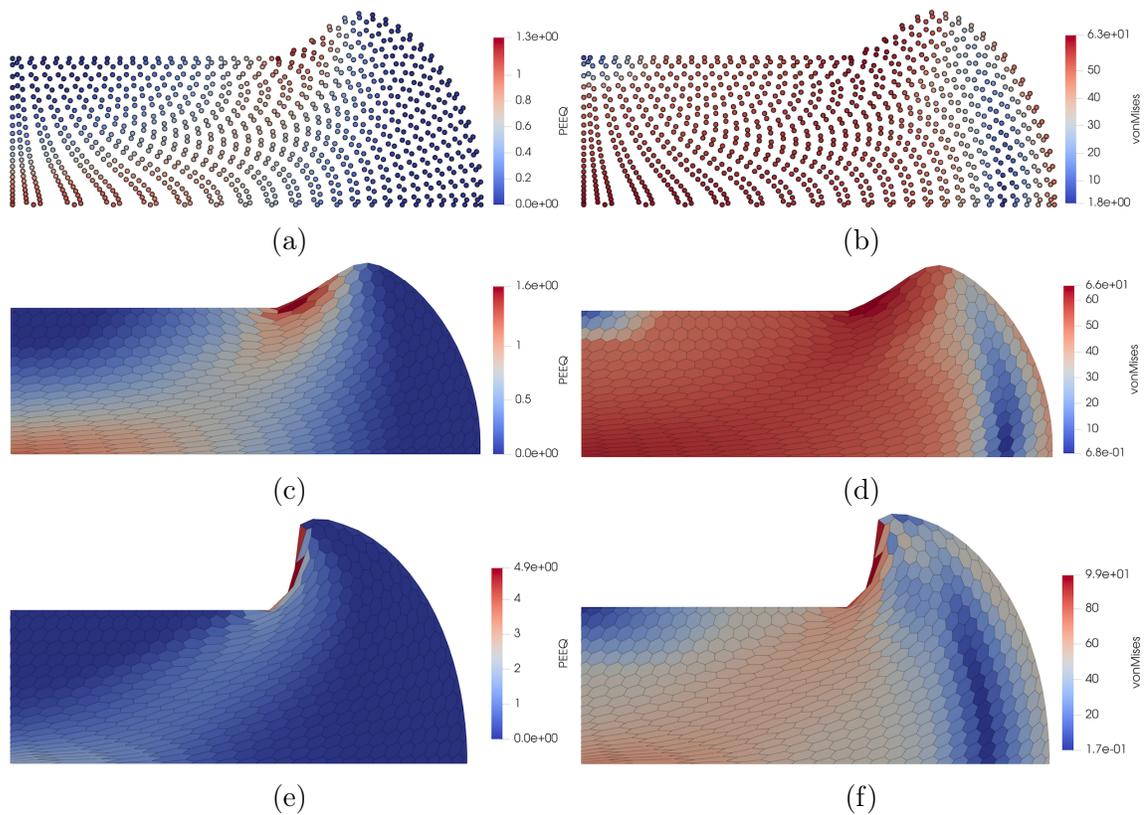


Figura 4.42: Resultados gráficos del problema de compresión plana bajo desplazamiento para elastoplasticidad finita. En (a), (c) y (e) se muestra la deformación plástica acumulada para los esquemas *NVEM*, *VEM1*, y *VEM2* respectivamente. En (b), (d) y (f) se muestra el esfuerzo de von Mises para los esquemas *NVEM*, *VEM1*, y *VEM2* respectivamente.

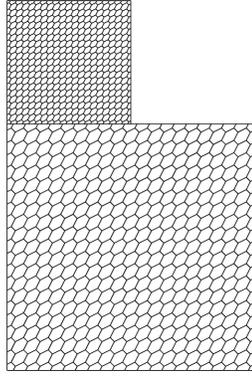


Figura 4.43: Malla utilizada en el problema de contacto entre dos bloques

para contacto elastoplástico. Debido a la simetría, se utiliza solo la mitad del dominio, cuya malla se muestra en la Figura 4.43. La parte inferior del cuerpo de contacto se impiden los desplazamientos verticales y horizontales, en la parte superior del cuerpo objeto se impone un desplazamiento de  $\hat{u}_2 = -0.35 \text{ in}$ , y en las caras izquierda de ambos cuerpos la condición de simetría. Se utiliza contacto penalizado. El material empleado es el modelo de Hencky en la parte elástica, y en el régimen plástico el modelo es basado en el criterio de von Mises, con endurecimiento isotrópico lineal, con diferentes propiedades para el cuerpo objeto y el cuerpo de contacto. Para el cuerpo de objeto se utiliza  $E_1 = 15 \times 10^6 \text{ psi}$ ,  $\nu_1 = 0.33$ ,  $S_{y1} = 19,5 \times 10^3 \text{ psi}$ ,  $H_1 = 0 \text{ psi}$ , y para el cuerpo de contacto  $E_2 = 10^7 \text{ psi}$ ,  $\nu_2 = 0.33$ ,  $S_{y2} = 13 \times 10^3 \text{ psi}$ ,  $H_2 = 0 \text{ psi}$ . En la Figura 4.44 se muestra los gráficos nodales para el esquema *NVEM*, donde se aprecia el buen comportamiento de los cuerpos en contacto, sin rastros de modos espurios.

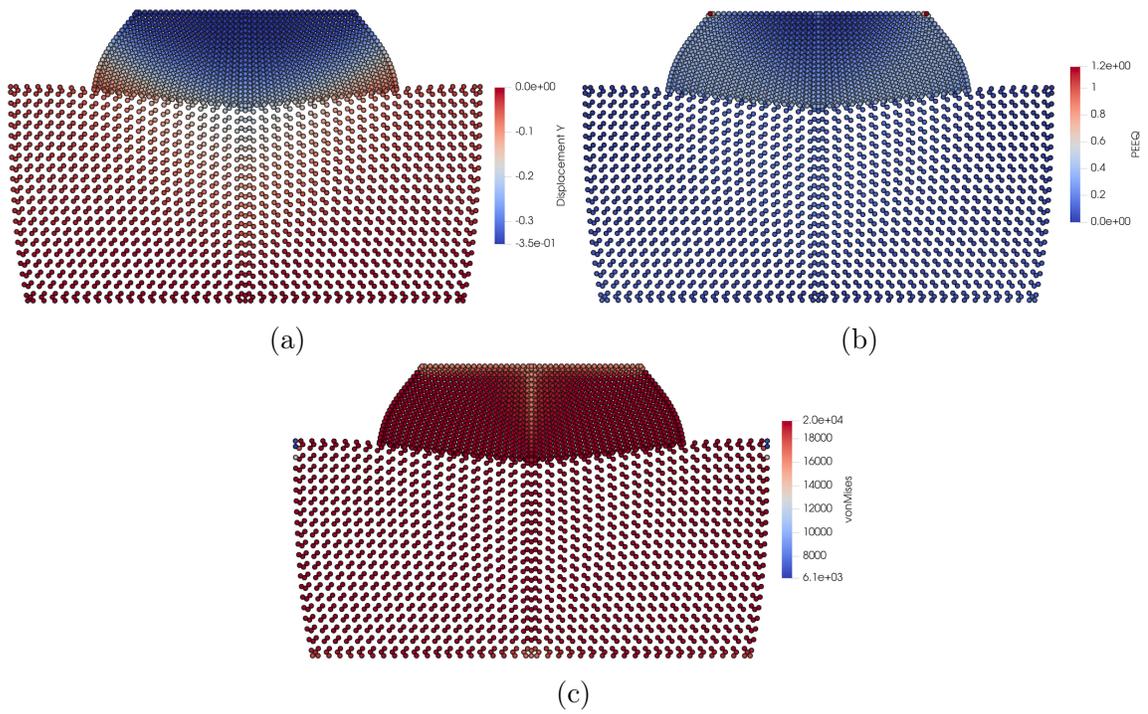


Figura 4.44: Resultados gráficos nodales del problema de contacto entre dos bloques. (a) Desplazamiento vertical, (b) deformación plástica acumulada, (c) y esfuerzo de von Mises.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo de tesis, se desarrolló e implementó un método de integración nodal basado en la forma débil de Galerkin y la descomposición del elemento virtual para mecánica de sólidos lineal y no lineal. La característica nodal se basa en la ponderación de la deformación de las celdas de integración asociado a cada nodo. Para deformaciones infinitesimales, la ponderación se construye con la ponderación del tensor de deformación infinitesimal, mientras que para deformaciones finitas, se construye con el tensor gradiente de deformación. Esta característica nodal permite que todas las variables se almacenen directamente en los nodos, incluida las variables que requieren ser almacenadas en los modelos de material dependiente del historial. La formulación demostró un buen desempeño para materiales compresible y casi-incompresibles, ya sea lineales y no lineales. Se estudiaron varios problemas estándar en dos dimensiones de referencia para evaluar la precisión y el rendimiento del método de integración nodal basado en la descomposición del elemento virtual comparándolos con otros esquemas numéricos estándar.

Para elasticidad lineal, se modelaron los problemas clásicos de una viga en voladizo, una placa con orificio y un cilindro de pared gruesa. Se modelaron materiales compresibles y casi-incompresible, donde el esquema propuestos *NVEM* mostró un buen desempeño, entregando soluciones precisas, convergentes y estables en la norma  $L^2$  y seminorma  $H^1$  del error de desplazamientos en todos estos ejemplos numéricos. En los ejemplos, *NVEM* mostró un desempeño similar a *VEM-B-bar*, pero con la diferencia que *NVEM* almacena las variables de esfuerzo y deformación en los nodos, mientras que *VEM-B-bar* las almacena en las celdas de integración.

Para elastoplasticidad infinitesimal, se modelaron los problemas clásicos de la membrana de Cook, una placa perforada sometida a tracción, un cilindro de pared gruesa y la prueba del punzón de Prandtl. El esquema propuesto, demostró resolver los problemas de forma precisa y sin bloqueo volumétrico. En estos modelos, la deformación plástica acumulada, variable que requiere ser utilizada en el siguiente paso de tiempo, es almanecada y evaluada directamente en los nodos.

La ampliación del esquema a la formulación con deformaciones finitas se probó en primer lugar para problemas hipereelásticos, donde se modeló la membrana de cook, un problema de

compresión bajo desplazamiento, un problema de compresión bajo presión, un problema de indentación sin fricción de un bloque elástico, un problema de oscilación libre, y un problema de impacto. En los problemas estáticos se comparó *NVEM* con *VEM* y dos estabilidades. El esquema propuesto *NVEM*, similar a *VEM1*, al heredar su estabilidad, demostró una buena precisión y ser capaz de soportar grandes deformaciones en materiales casi-incompresibles, mientras que el esquema *NVEM2* mostró inestabilidades bajo la deformación impuesta, a pesar de converger más rápido en el problema de la membrana de Cook en comparación a los demás esquemas. Respecto al problema de impacto, este mostró ser estable durante la simulación estudiada.

Finalmente, la formulación se probó para elastoplasticidad con deformaciones finitas, que al igual que en el caso anterior, se comparó con el esquema propuesto con *VEM* y dos estabilidades. Los problemas implementados son la membrana de Cook, el problema de indentación sin fricción de un bloque, un problema de compresión bajo desplazamiento, y un problema de contacto simple. Los esquemas, al heredar la estabilidad del *VEM* para deformaciones finitas, demostró una buena precisión y ser capaz de soportar grandes deformaciones en materiales casi-incompresibles, mientras que el esquema *NVEM2* mostró inestabilidades bajo la deformación impuesta, generando una sobreestimación de la deformación plástica acumulada. Respecto al problema de contacto, este demostró no poseer inestabilidades numéricas.

Como desventaja se puede decir que el esquema requiere el desarrollo de estabilidades más robustas, que no disipen energía, esto según el comportamiento energético mostrado en el problema de la columna bajo oscilación libre. Para trabajos futuros se sugiere extender el esquema *NVEM* a las tres dimensiones, tanto para problemas lineales y no lineales. También se sugiere implementar el esquema en problemas con grandes deformaciones que requieran remallados sucesivos para aprovechar el almacenamiento de las variables en los nodos, y así evitar el remapeo de información.

# Bibliografía

- [1] T. Belytschko, W. Liu, B. Moran, and K. Elkhodary, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. No. 1, Wiley, second ed., 2013.
- [2] N. H. Kim, K. K. Choi, and J. S. Chen, “Die shape design optimization of sheet metal stamping process using meshfree method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, no. 12, pp. 1385–1405, 2001.
- [3] K. H. Chang and K. K. Choi, “Shape design sensitivity analysis and optimization of spatially rotating objects,” *Structural Optimization*, vol. 6, no. 4, pp. 216–226, 1993.
- [4] J.-S. Chen, M. Hillman, and S.-W. Chi, “Meshfree Methods: Progress Made after 20 Years,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 143, no. 4, p. 04017001, 2017.
- [5] J. Dolbow and T. Belytschko, “Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods,” *Computational Mechanics*, vol. 23, no. 3, pp. 219–230, 1999.
- [6] R. Silva-Valenzuela, A. Ortiz-Bernardin, N. Sukumar, E. Artioli, and N. Hitschfeld-Kahler, “A nodal integration scheme for meshfree Galerkin methods using the virtual element decomposition,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 121, no. 10, pp. 2174–2205, 2020.
- [7] N. S. Lee and K. J. Bathe, “Error indicators and adaptive remeshing in large deformation finite element analysis,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 16, no. 2, pp. 99–139, 1994.
- [8] D. Perić, C. Hochard, M. Dutko, and D. R. Owen, “Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 137, no. 3-4, pp. 331–344, 1996.
- [9] M. M. Rashid, “Material state remapping in computational solid mechanics,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 55, no. 4, pp. 431–450, 2002.
- [10] J. Meng, X. Zhang, S. Utili, and E. Oñate, “A nodal-integration based particle finite element method (N-PFEM) to model cliff recession,” *Geomorphology*, p. 144034, 2020.
- [11] S. Beissel and T. Belytschko, “Nodal integration of the element-free Galerkin method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, no. 1-4, pp. 49–74, 1996.

- [12] J.-S. Chen, C.-T. Wu, S. Yoon, and Y. You, “A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, no. February 2000, pp. 435–466, 2001.
- [13] G. R. Liu, G. Y. Zhang, Y. Y. Wang, Z. H. Zhong, G. Y. Li, and X. Han, “A nodal integration technique for meshfree radial point interpolation method (NI-RPIM),” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 11-12, pp. 3840–3860, 2007.
- [14] Q. Duan, B. Wang, X. Gao, and X. Li, “Quadratically consistent nodal integration for second order meshfree Galerkin methods,” *Computational Mechanics*, vol. 54, no. 2, pp. 353–368, 2014.
- [15] C. R. Dohrmann, M. W. Heinstein, J. Jung, S. W. Key, and W. R. Witkowski, “Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, no. 9, pp. 1549–1568, 2000.
- [16] B. D. Veiga, F. Brezzi, and L. D. Marini, “Virtual Elements for Linear Elasticity Problems,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 51, no. 2, pp. 794–812, 2013.
- [17] P. Wriggers and B. Hudobivnik, “A low order virtual element formulation for finite elasto-plastic deformations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 327, pp. 459–477, 2017.
- [18] A. Ortiz-Bernardin, R. Silva-Valenzuela, S. Salinas-Fernández, N. Hitschfeld-Kahler, S. Luza, and B. Rebolledo, “A node-based uniform strain virtual element method for compressible and nearly incompressible elasticity,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 124, no. 8, pp. 1818–1855, 2023.
- [19] R. Silva-Valenzuela, A. Ortiz-Bernardin, and E. Artioli, “A node-based uniform strain virtual element method for elastoplastic solids,” *Computational Mechanics*, 2024.
- [20] J. Bonet and A. J. Burton, “A simple average nodal pressure tetrahedral element for incompressible and nearly incompressible dynamic explicit applications,” *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, no. 5, pp. 437–449, 1998.
- [21] M. A. Puso, J. S. Chen, E. Zywicz, and W. Elmer, “Meshfree and finite element nodal integration methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, no. September 2007, pp. 416–446, 2008.
- [22] J. Bonet, H. Marriott, and O. Hassan, “An averaged nodal deformation gradient linear tetrahedral element for large strain explicit dynamic applications,” *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, no. 8, pp. 551–561, 2001.
- [23] J. S. Chen, S. Yoon, and C. T. Wu, “Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, no. 12, pp. 2587–2615, 2002.
- [24] J. S. Chen, W. Hu, M. A. Puso, Y. Wu, and X. Zhang, “Strain smoothing for stabiliza-

- tion and regularization of galerkin meshfree methods,” *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 57, pp. 57–75, 2007.
- [25] M. A. Puso and J. Solberg, “A stabilized nodally integrated tetrahedral,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 67, no. 6, pp. 841–867, 2006.
- [26] T. Nagashima, “Node-by-node meshless approach and its applications to structural analyses,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, no. 3, pp. 341–385, 1999.
- [27] Q. Duan and T. Belytschko, “Gradient and dilatational stabilizations for stress-point integration in the element-free Galerkin method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, no. 6, pp. 776–798, 2009.
- [28] G. R. Liu, T. Nguyen-Thoi, H. Nguyen-Xuan, and K. Y. Lam, “A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems,” *Computers and Structures*, vol. 87, no. 1-2, pp. 14–26, 2009.
- [29] Z. Q. Zhang and G. R. Liu, “Temporal stabilization of the node-based smoothed finite element method and solution bound of linear elastostatics and vibration problems,” *Computational Mechanics*, vol. 46, no. 2, pp. 229–246, 2010.
- [30] H. Feng, X. Y. Cui, G. Y. Li, and S. Z. Feng, “A temporal stable node-based smoothed finite element method for three-dimensional elasticity problems,” *Computational Mechanics*, vol. 53, no. 5, pp. 859–876, 2014.
- [31] G. Chen, L. Qian, and J. Ma, “A gradient stable node-based smoothed finite element method for solid mechanics problems,” *Shock and Vibration*, vol. 2019, 2019.
- [32] Q. Duan, X. Li, H. Zhang, and T. Belytschko, “Second-order accurate derivatives and integration schemes for meshfree methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012.
- [33] M. Hillman and J.-S. Chen, “An accelerated, convergent, and stable nodal integration in Galerkin meshfree methods for linear and nonlinear mechanics,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 107, no. 7, pp. 603–630, 2015.
- [34] L. Beirão Da Veiga, F. Dassi, and A. Russo, “High-order Virtual Element Method on polyhedral meshes,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 74, no. 5, pp. 1110–1122, 2017.
- [35] L. Beirão Da Veiga, F. Brezzi, F. Dassi, L. D. Marini, and A. Russo, “Serendipity Virtual Elements for General Elliptic Equations in Three Dimensions,” *Chinese Annals of Mathematics. Series B*, vol. 39, no. 2, pp. 315–334, 2018.
- [36] L. Beirão Da Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, L. D. Marini, and A. Russo, “Basic Principles of Virtual Element Methods,” *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 23, no. 01, pp. 199–214, 2013.

- [37] E. Artioli, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, and E. Sacco, “Arbitrary order 2D virtual elements for polygonal meshes: part I, elastic problem,” *Computational Mechanics*, vol. 60, no. 3, pp. 355–377, 2017.
- [38] A. L. Gain, C. Talischi, and G. H. Paulino, “On the Virtual Element Method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 282, pp. 132–160, 2014.
- [39] E. Artioli, S. de Miranda, C. Lovadina, and L. Patruno, “A stress/displacement Virtual Element method for plane elasticity problems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 325, pp. 155–174, 2017.
- [40] P. Wriggers, W. T. Rust, and B. D. Reddy, “A virtual element method for contact,” *Computational Mechanics*, vol. 58, no. 6, pp. 1039–1050, 2016.
- [41] P. Wriggers and W. T. Rust, “A virtual element method for frictional contact including large deformations,” *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, vol. 36, no. 7, pp. 2133–2161, 2019.
- [42] F. Aldakheel, B. Hudobivnik, and P. Wriggers, “Virtual elements for finite thermo-plasticity problems,” *Computational Mechanics*, vol. 64, no. 5, pp. 1347–1360, 2019.
- [43] V. Dhanush and S. Natarajan, “Implementation of the virtual element method for coupled thermo-elasticity in Abaqus,” *Numerical Algorithms*, vol. 80, no. 3, pp. 1037–1058, 2019.
- [44] B. Hudobivnik, F. Aldakheel, and P. Wriggers, “A low order 3D virtual element formulation for finite elasto-plastic deformations,” *Computational Mechanics*, vol. 63, no. 2, pp. 253–269, 2019.
- [45] P. Wriggers, B. Hudobivnik, and J. Schröder, “Finite and virtual element formulations for large strain anisotropic material with inextensive fibers,” *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, vol. 86, pp. 205–231, 2018.
- [46] B. D. Reddy and D. van Huyssteen, “A virtual element method for transversely isotropic elasticity,” *Computational Mechanics*, vol. 64, no. 4, pp. 971–988, 2019.
- [47] M. L. De Bellis, P. Wriggers, B. Hudobivnik, and G. Zavarise, “Virtual element formulation for isotropic damage,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 144, no. January, pp. 38–48, 2018.
- [48] E. Artioli, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, and E. Sacco, “Arbitrary order 2D virtual elements for polygonal meshes: part II, inelastic problem,” *Computational Mechanics*, vol. 60, no. 4, pp. 643–657, 2017.
- [49] L. Beirão Da Veiga, C. Lovadina, and D. Mora, “A Virtual Element Method for elastic and inelastic problems on polytope meshes,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 295, pp. 327–346, 2015.

- [50] P. Wriggers, B. D. Reddy, W. Rust, and B. Hudobivnik, “Efficient virtual element formulations for compressible and incompressible finite deformations,” *Computational Mechanics*, vol. 60, no. 2, pp. 253–268, 2017.
- [51] H. Chi, L. B. da Veiga, and G. H. Paulino, “Some basic formulations of the virtual element method (VEM) for finite deformations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 318, pp. 148–192, 2017.
- [52] D. van Huyssteen and B. D. Reddy, “A virtual element method for isotropic hyperelasticity,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 367, p. 113134, 2020.
- [53] C. Böhm, J. Kruse, M. Stonis, F. Aldakheel, and P. Wriggers, “Virtual element method for cross-wedge rolling during tailored forming processes,” *Procedia Manufacturing*, vol. 47, no. 2019, pp. 713–718, 2020.
- [54] M. Mengolini, M. F. Benedetto, and A. M. Aragón, “An engineering perspective to the virtual element method and its interplay with the standard finite element method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 350, pp. 995–1023, 2019.
- [55] K. Park, H. Chi, and G. H. Paulino, “On nonconvex meshes for elastodynamics using virtual element methods with explicit time integration,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 356, pp. 669–684, 2019.
- [56] L. Beirão Da Veiga, F. Brezzi, L. D. Marini, and A. Russo, “The Hitchhiker’s Guide to the Virtual Element Method,” *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 24, no. 08, pp. 1541–1573, 2014.
- [57] L. Mascotto, “Ill-conditioning in the virtual element method: Stabilizations and bases,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 34, no. 4, pp. 1258–1281, 2018.
- [58] H. Chi, L. B. da Veiga, and G. H. Paulino, “Some basic formulations of the virtual element method (VEM) for finite deformations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 318, pp. 148–192, 2017.
- [59] K. Park, H. Chi, and G. H. Paulino, “B-bar virtual element method for nearly incompressible and compressible materials,” *Meccanica*, vol. 56, no. 6, pp. 1423–1439, 2021.